

# Lorentztransformationen

Untersuchung einiger Eigenschaften

von

**Dr. Ralph Hübner**

Wesel, Oktober 2010 (Rev. Juli 2016)



# Einleitung

In dieser Abhandlung betrachten wir einige Eigenschaften von Lorentztransformationen, die meines Erachtens dem Verständnis dienlich sind und die ich an einer zentralen Stelle zusammenfassen möchte. Auf diese Weise wird unnötige Arbeit vermieden falls diese Resultate erneut benötigt werden, und ich kann sie darüberhinaus auch anderen zur Verfügung stellen. Es handelt sich nicht um eine Diskussion der physikalischen Aussage der Lorentztransformation, es geht allein um ihre algebraische Struktur und die Einbettung in einen geeigneten mathematischen Rahmen. Die sich daraus ergebenden Anforderungen sind moderat; wenn wir beispielsweise die Spinordarstellung des Weltvektors und dessen Transformation benötigen, stellen wir die Darstellungstheorie der Lorentztransformationen in einem kurzen Abriß vor. Dieser Text baut gewissermaßen auf der Abhandlung [3] über Rotationen auf, aus welcher auch die Art des mathematischen Vorgehens übernommen wurde.

Der physikalische Hintergrund der Speziellen Relativitätstheorie wird als bekannt vorausgesetzt und nicht weiter diskutiert; stattdessen liegt der Schwerpunkt auf der formalen Analyse. Ich denke, der Schlüssel für ein tiefergehendes Verständnis jedes physikalischen Phänomens liegt in der geschickten Wahl der mathematischen Begriffe, die zur Formulierung herangezogen werden. So lassen sich beispielsweise Rotationen im Raum  $\mathbb{R}^3$  durch Quaternionen übersichtlicher beschreiben als durch die Fundamentaldarstellung der Gruppe  $SO(3)$ , also den Rotationsmatrizen allein [7]. Ein weiteres praktisches Hilfsmittel ist die Theorie der Lie-Gruppen, welche neben der Einbettung kontinuierlich parametrisierbarer Symmetrieoperationen in einen Standardformalismus auch konkrete Resultate wie z.B. die Rodrigues-Rotationsformel generiert [3].

Zunächst werden wir die für die nachfolgenden Themen wichtigen Eigenschaften der Lorentztransformation auflisten. Anschließend bilden die einzelnen Kapitel mehr oder weniger abgeschlossene Einheiten mit nur lockerem Zusammenhang – ein Inhaltsverzeichnis für das bequeme Heraussuchen der Themen ist daher unumgänglich. Sollte nichts interessantes zu finden sein, hilft es zumindest, den Zeitverlust durch unnötiges Lesen gering zu halten :-).



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b> . . . . .	<b>i</b>
<b>1 Grundlagen der Lorentztransformation</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Isometrieforderung . . . . .	1
1.2 Polarzerlegung . . . . .	2
<b>2 Herleitung der Speziellen Lorentztransformation</b> . . . . .	<b>4</b>
2.1 Lösung des Gleichungssystems . . . . .	4
2.2 Der Galilei– Grenzfall . . . . .	5
2.3 Einführung der Rapidität $\chi$ . . . . .	6
<b>3 Geschwindigkeit einer Lorentztransformation</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>4 Der allgemeine Lorentz–Boost</b> . . . . .	<b>9</b>
4.1 Quaternionen und die Paulischen Spinmatrizen . . . . .	10
4.2 Lorentzspinoren und Transformation des Weltvektors . . . . .	11
4.3 Lorentz–Boosts als Darstellung der Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	16
4.4 Additionstheorem für parallele Geschwindigkeiten . . . . .	17
4.5 Lorentz–Boosts als Elemente der Gruppe $SO(1,3)$ . . . . .	19
4.6 Lorentz–Boosts und die Lie–Algebra $\mathfrak{so}(1,3)$ . . . . .	22
<b>5 Die Thomas–Wigner Rotation</b> . . . . .	<b>31</b>
5.1 Gemeinsame Darstellung von Boosts und Rotationen . . . . .	31

5.2	Polarzerlegung des Produktes zweier Boosts . . . . .	32
5.3	Plausibilität des Gleichungssystems . . . . .	34
5.4	Lösung des Gleichungssystems . . . . .	37
5.5	Additionstheorem für nichtparallele Geschwindigkeiten . . . . .	42
5.6	Diskussion des Rotationswinkels . . . . .	44
	<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>47</b>

# 1 Grundlagen der Lorentztransformation

In diesem Kapitel stellen wir aus der Literatur zur Speziellen Relativitätstheorie einige Eigenschaften der Lorentztransformation zusammen, auf die wir im Verlauf des Textes zurückgreifen werden. Als Alternative zur Standardliteratur [5], [7] beziehen wir uns auch auf ein Vorlesungsskript zur Quantenfeldtheorie [8], welches zu Beginn die algebraischen Eigenschaften der Lorentztransformation in komprimierter Form zusammenfaßt und das an der RWTH Aachen zum Download angeboten wird:

[http://www.physik.rwth-aachen.de/fileadmin/  
user\\_upload/www\\_physik/Bibliothek/Skripte/Roepstorff/qft-2000.pdf](http://www.physik.rwth-aachen.de/fileadmin/user_upload/www_physik/Bibliothek/Skripte/Roepstorff/qft-2000.pdf)

## 1.1 Isometrieforderung

In der Speziellen Relativitätstheorie erhält das Raum–Zeit–Kontinuum seine besondere Struktur durch die Minkowskimetrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Diese Wahl  $\{+ - - -\}$  der Signatur wird als „West Coast Metric“ bezeichnet, denn sie entspricht den Konventionen der Teilchenphysik–Institute an der Westküste der USA. Lorentztransformationen sind lineare homogene Transformationen  $\Lambda_{\mu}^{\nu}$ , welche die Form der Minkowskimetrik unverändert lassen:

$$g_{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu'}^{\alpha} \Lambda_{\nu'}^{\beta} g_{\alpha\beta} := g_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \Lambda g \Lambda^T = g. \quad (1.2)$$

Diese Isometrieeigenschaft der Lorentztransformation haben wir in (1.2) sowohl in Komponenten– als auch in Matrixform hingeschrieben. Aus letzterer läßt sich eine Aussage über die Determinante von  $\Lambda$  ableiten:

$$\det[\Lambda] \cdot \det[g] \cdot \det[\Lambda] = \det[g] \quad \Rightarrow \quad \det[\Lambda] = \pm 1. \quad (1.3)$$

Transformationen des Typs (1.2) werden je nach Signatur  $\{p, q\}$  der Metrik in der „Orthogonalen Gruppe“  $O(p, q)$  bzw. der „Speziellen orthogonalen Gruppe“  $SO(p, q)$  zusammengefaßt, je nachdem, ob man sämtliche isometrischen Transformationen zuläßt oder sich auf Transformationen mit der Determinante 1 beschränkt [1]. Die Bezeichnung „orthogonal“ ist irreführend, denn im Allgemeinen sind diese Transformationen keine orthogonalen Matrizen. Nur wenn es sich mit  $q = 0$  oder  $p = 0$  um die Standardmetrik handelt sind die Transformationsmatrizen tatsächlich orthogonal:

$$\Lambda \Lambda^T = 1. \quad (1.4)$$

In diesem speziellen Fall werden die Matrixgruppen vereinfacht als  $O(n)$  bzw.  $SO(n)$  bezeichnet,  $n = p + q$  ist die Dimension des betrachteten Raumes.

Die orthogonale Gruppe der Minkowskimetrik (1.1) heißt „Lorentzgruppe“, wobei wir uns auf Transformationen mit  $\det[\Lambda] = 1$  beschränken werden. Die Mitglieder dieser Untergruppe der Lorentztransformationen ändern weder die Richtung der Zeitachse noch die Orientierung der räumlichen Achsen und bilden die „Eigentliche orthochrone Lorentzgruppe“  $SO(1,3)$  [8].

## 1.2 Polarzerlegung

Komplexe Zahlen  $z = x + iy$  sind in der komplexen Zahlenebene durch Polarkoordinaten darstellbar

$$z = e^{i\varphi} r, \tag{1.5}$$

wobei die positive Zahl  $r$  für den Abstand des Punktes  $z$  zum Ursprung der komplexen Zahlenebene steht und  $\varphi$  den Winkel zur reellen Achse beschreibt. Die Zahl  $e^{i\varphi}$  ist ein unimodularer Phasenfaktor, und wir können die Eigenschaften von  $r$  und  $e^{i\varphi}$  folgendermaßen zusammenfassen:

$$e^{i\varphi} (e^{i\varphi})^* = 1 \quad (\text{unimodular}) \tag{1.6}$$

$$r \geq 0 \quad (\text{positiv}). \tag{1.7}$$

Dieses Konzept der Polardarstellung kann einem Satz der Matrixalgebra zufolge auf invertierbare komplexe Matrizen übertragen werden. Dieses Verfahren nennt sich „Polarzerlegung einer Matrix“ und besagt, daß jede solche Matrix  $A$  eindeutig als das Produkt einer unitären Matrix  $U$  und einer hermiteschen positiven Matrix  $H$  bzw.  $H'$  geschrieben werden kann [8]:

$$A = UH \quad \text{oder} \quad A = H'U. \tag{1.8}$$

Unitarität und Hermitezität drücken sich folgendermaßen aus:

$$UU^\dagger = 1 \quad (\text{unitär}) \tag{1.9}$$

$$H^\dagger = H \quad \text{bzw.} \quad H'^\dagger = H' \quad (\text{hermitesch}). \tag{1.10}$$

Das Symbol  $\dagger$  faßt die komplexe Konjugation ( $*$ ) und die Transposition ( $T$ ) zu einer einzigen Operation zusammen. Der Ausdruck „positive hermitesche Matrix“ besagt, daß die reellen Eigenwerte von  $H$  bzw.  $H'$  nicht negativ sind. Bei dieser Zerlegung kann die unitäre Matrix  $U$  links oder rechts stehen, wobei die so generierten hermiteschen Matrizen sich folgendermaßen ineinander umrechnen lassen:

$$H' = UHU^\dagger. \tag{1.11}$$



Beschränken wir die Polarzerlegung auf reelle Matrizen, wird die unitäre Matrix  $U$  zur orthogonalen Matrix  $R$ , und die positiven hermiteschen Matrizen  $H$  bzw.  $H'$  werden zu positiven symmetrischen Matrizen  $P$  bzw.  $P'$ :

$$A = RP \quad \text{oder} \quad A = P'R. \quad (1.12)$$

Orthogonale bzw. symmetrische Matrizen erfüllen die folgenden Bedingungen:

$$RR^T = 1 \quad (\text{orthogonal}) \quad (1.13)$$

$$P^T = P \quad \text{bzw.} \quad P'^T = P' \quad (\text{symmetrisch}). \quad (1.14)$$

In diesem Fall bedeutet der Ausdruck „positiv“, daß die reellen Eigenwerte der symmetrischen Matrizen  $P$  bzw.  $P'$  nicht negativ sind. Aufgrund der Links- bzw. Rechtsstellung von  $R$  sind beide Matrizen verschieden und lassen sich folgendermaßen ineinander umrechnen:

$$P' = RPR^T. \quad (1.15)$$

Wir wenden nun die Polarzerlegung auf reelle Lorentztransformationen an und erhalten analog zu (1.12):

$$\Lambda = R\Lambda_B. \quad (1.16)$$

Die Matrix  $R$  beschreibt eine Drehung des Koordinatensystems, während  $\Lambda_B$  die Bezeichnung für eine „reine“ Lorentztransformation ist, welche ein Inertialsystem in ein anderes ohne zusätzliche Drehung überführt. Der Vektor der relativen Geschwindigkeit beider Inertialsysteme ist hierbei beliebig im Raum orientiert. Eine reine Lorentztransformation wird auch „Boost“ genannt. Beide Anteile  $R$  und  $\Lambda_B$  sind selbst Lorentztransformationen mit den Eigenschaften

$$RR^T = 1 \quad (\text{Drehung, orthogonal}) \quad (1.17)$$

$$\Lambda_B^T = \Lambda_B \quad (\text{Boost, symmetrisch}). \quad (1.18)$$

Als Lorentztransformation muß die Drehmatrix  $R$  die Isometrieforderung (1.2) erfüllen, weswegen sie kein beliebiges Element der Gruppe  $SO(4)$  sein kann sondern zur Untergruppe  $SO(3)$  gehören muß. Die Gleichung (1.2) beschränkt nämlich die Operation der Drehmatrix über die Signatur der Minkowskimetrik auf die räumlichen Koordinaten, wodurch  $R$  in die folgende Blockstruktur zerfällt:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{array}{|c} \hline R_3 \\ \hline \end{array} \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad R_3 \in SO(3). \quad (1.19)$$

Auch die Boosttransformation  $\Lambda_B$  wird durch die Isometrieforderung eingeschränkt, denn sie besitzt als Element der Eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe die Determinante  $\det[\Lambda_B] = 1$ . Ihre Eigenwerte sind somit echt positiv und können nicht verschwinden.

## 2 Herleitung der Speziellen Lorentztransformation

Man spricht von einer „Speziellen Lorentztransformation“ wenn die Richtung der Relativgeschwindigkeit beider Inertialsysteme auf eine der räumlichen Koordinatenachsen fällt. In diesem Kapitel wollen wir demonstrieren, daß die Isometrieforderung eine Spezielle Lorentztransformation bereits bis auf einen Parameter festlegt. Der Vergleich mit einer Galileitransformation für  $v/c \ll 1$  verbindet diesen Parameter mit der Geschwindigkeit  $v$ .

Da eine Spezielle Lorentztransformation nur auf eine räumliche Koordinate wirkt, reduzieren wir den Minkowskiraum auf zwei Dimensionen:  $x^0$  (Zeit) und  $x^1$  (Raum). In dieser zweidimensionalen Raum–Zeit ist jede Lorentztransformation „rein“, denn in einer Raumdimension gibt es keine Rotationen. Wir bezeichnen die Matrixelemente der Speziellen Lorentztransformation  $\Lambda_s$  mit  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$ :

$$\Lambda_s = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Wir wissen bereits, daß diese Matrix symmetrisch sein muß und könnten einen Parameter eliminieren. Wir wollen jedoch zeigen, daß auch die Symmetrie aus der Isometrieforderung folgt. Die Metrik dieses zweidimensionalen Raum–Zeitkontinuums lautet

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

### 2.1 Lösung des Gleichungssystems

Wir setzen nun Ansatz (2.2) in die Isometrieforderung  $\Lambda_s g \Lambda_s^T = g$  ein und erhalten

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & ac - bd \\ ac - bd & c^2 - d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

welches einem System von drei unabhängigen Gleichungen entspricht:

$$a^2 - b^2 = 1 \quad (2.4)$$

$$c^2 - d^2 = -1 \quad (2.5)$$

$$ac - bd = 0. \quad (2.6)$$

Dieses Gleichungssystem lösen wir mit den folgenden Rechenschritten:

$$b = (c/d) a \quad \text{aus (2.6)} \quad (2.7)$$

$$a^2 (1 - (c/d)^2) = 1 \quad \text{aus (2.4) und (2.7)} \quad (2.8)$$

$$a^2 = d^2 \quad \text{aus (2.8) und (2.5)} \quad (2.9)$$

$$b^2 = c^2 \quad \text{aus (2.9) und (2.6).} \quad (2.10)$$

Wir führen als Abkürzung  $\beta := c/d$  ein und erhalten:

$$a^2(1 - \beta^2) = 1 \quad \text{aus (2.8)} \quad (2.11)$$

$$b = \beta a \quad \text{aus (2.7)}. \quad (2.12)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (2.7) – (2.12) können wir alle Koeffizienten in dem neuen Parameter  $\beta$  ausdrücken:

$$a = d = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} =: \gamma \quad \text{aus (2.11) und (2.9)} \quad (2.13)$$

$$b = c = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} =: \gamma\beta \quad \text{aus (2.12), (2.13) und (2.10)}. \quad (2.14)$$

Die Wahl der positiven Wurzel beim Auflösen der Quadrate wurde getroffen, um innerhalb der Eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe zu bleiben. Elemente dieser Matrixgruppe besitzen eine positive Komponente  $\Lambda_0^0$ , wodurch die Umkehr der Zeitrichtung durch die Transformation verhindert wird. Damit lautet die Spezielle Lorentztransformation in Matrixgestalt:

$$\Lambda_s = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

## 2.2 Der Galilei– Grenzfall

Um die Abhängigkeit des Parameters  $\beta$  von der Relativgeschwindigkeit  $v$  zu bestimmen, betrachten wir die Auswirkung der Lorentztransformation auf den Weltvektor

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Wir müssen allerdings beachten, daß die Spezielle Lorentztransformation (2.15) Basisvektoren transformiert und nicht Komponenten. Für die Transformation der Komponenten benötigen wir die transponierte inverse Matrix

$$\tilde{\Lambda}_s = (\Lambda_s^{-1})^T = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Mit der Matrix  $\tilde{\Lambda}_s$  können wir die Transformation der Komponenten durchführen:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \begin{pmatrix} t - \beta/c x \\ x - \beta ct \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Wir betrachten nun den Grenzübergang  $c \rightarrow \infty$  und vergleichen ihn mit der zugehörigen Galileitransformation

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x - vt \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Die Durchführung des Grenzübergangs in (2.18) ergibt zunächst

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \begin{pmatrix} t \\ x - \beta ct \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Damit der Term  $\beta c$  bei diesem Grenzübergang nicht divergiert, müssen wir davon ausgehen, daß  $\beta$  sich wie  $\beta \sim 1/c$  verhält. Als Konsequenz verschwindet der Wurfelfaktor in (2.20) und wir können das Resultat direkt mit der Galileitransformation vergleichen:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x - \beta ct \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t \\ x - vt \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Der Parameter  $\beta$  wird durch die  $x$ -Komponente von (2.21) festgelegt zu

$$\beta = \frac{v}{c}. \quad (2.22)$$

## 2.3 Einführung der Rapidität $\chi$

Interessanterweise kann eine Spezielle Lorentztransformation als eine Art Drehung um einen Quasiwinkel  $\chi$  mit dem Namen „Rapidität“ aufgefaßt werden. Die Matrix (2.15) der Transformation  $\Lambda_S$  ist allerdings kein Element der Drehgruppe  $SO(2)$  sondern der Lorentzgruppe  $SO(1,1)$ , und sie ist insbesondere auch nicht orthogonal. Stattdessen erfüllt  $\Lambda_S$  eine Art Antiorthogonalitätsrelation

$$\Lambda_S \Lambda_S^T = 1, \quad (2.23)$$

in welcher  $\Lambda_S^T$  für die transponierte Matrix steht, in der zusätzlich die Nichtdiagonalelemente in ihr Negatives umgewandelt werden, vgl. (2.17). Diese Eigenschaft ist auf Spezielle Lorentztransformationen beschränkt und läßt sich nicht auf allgemeine Boosts übertragen. Als Konsequenz dieser Antiorthogonalität sind die Koeffizienten von  $\Lambda_S$  keine trigonometrischen sondern hyperbolische Funktionen der Rapidität:

$$\cosh(\chi) = \gamma \quad (2.24)$$

$$\sinh(\chi) = \gamma\beta. \quad (2.25)$$

Tatsächlich gilt die für die hyperbolischen Funktionen bekannte Beziehung

$$\cosh^2(\chi) - \sinh^2(\chi) = \gamma^2(1 - \beta^2) = 1. \quad (2.26)$$

Mit Hilfe der beiden Gleichungen (2.24) und (2.25) läßt sich die Rapidität berechnen:

$$\tanh(\chi) = \beta \quad \Rightarrow \quad \chi = \operatorname{artanh}\left(\frac{v}{c}\right). \quad (2.27)$$

Ausgedrückt in  $\chi$  lautet die Spezielle Lorentztransformation 2.15

$$\Lambda_S = \begin{pmatrix} \cosh(\chi) & \sinh(\chi) \\ \sinh(\chi) & \cosh(\chi) \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

worin die Analogie zur Rotationsmatrix besonders augenfällig ist.

### 3 Geschwindigkeit einer Lorentztransformation

In diesem Kapitel stellen wir ein einfaches Verfahren vor, mit dem sich die Geschwindigkeit bzw. der Parameter  $\beta$  einer gegebenen Lorentztransformation  $\Lambda$  berechnen läßt. Die Idee zu dieser Herleitung ist dem Vorlesungsskript [8] entnommen.

In Abschnitt 1.2 haben wir die Polarzerlegung kennengelernt, durch die sich eine Lorentztransformation in das Produkt einer Drehung  $R$  und eines Boosts  $\Lambda_B$  zerlegen läßt:

$$\Lambda = R \Lambda_B. \quad (3.1)$$

Durch die folgende Operation verschwindet der Rotationsanteil:

$$\Lambda^T \Lambda = \Lambda_B^T R^T R \Lambda_B = \Lambda_B^T \Lambda_B, \quad (3.2)$$

denn  $R$  ist eine orthogonale Matrix für die  $R^T R = 1$  gilt. Im nächsten Schritt suchen wir eine neue Basis, welche eine räumliche Koordinatenachse besitzt, die mit der Richtung des Geschwindigkeitsvektors der Lorentztransformation übereinstimmt. Wir entscheiden uns willkürlich für die Achse  $x^1$  und führen auf diese Weise die reine Lorentztransformation  $\Lambda_B$  auf eine Spezielle Lorentztransformation  $\Lambda_S$  zurück. Die Transformation der Basis wird durch eine Drehung  $R_S$  bewerkstelligt, die als orthogonale Matrix der Bedingung

$$R_S R_S^T = 1 \quad (3.3)$$

unterliegt.  $\Lambda_B$  berechnet sich aus  $\Lambda_S$  über die Transformationsgleichung

$$\Lambda_B = R_S^T \Lambda_S R_S \quad (3.4)$$

(Ausrichten des Koordinatensystems, Durchführung der Speziellen Lorentztransformation, Rückdrehen des Koordinatensystems). Setzen wir die Darstellung (3.4) für  $\Lambda_B$  in (3.2) ein, erhalten wir

$$\Lambda^T \Lambda = \Lambda_B^T \Lambda_B = R_S^T \Lambda_S^T R_S R_S^T \Lambda_S R_S = R_S^T \Lambda_S^T \Lambda_S R_S. \quad (3.5)$$

Wir können Matrix  $R_S$  vollständig verschwinden lassen, indem wir die Spur des Ausdrucks (3.5) bilden:

$$\text{Tr}[\Lambda^T \Lambda] = \text{Tr}[R_S^T \Lambda_S^T \Lambda_S R_S] = \text{Tr}[R_S R_S^T \Lambda_S^T \Lambda_S] = \text{Tr}[\Lambda_S^T \Lambda_S]. \quad (3.6)$$

Diese Spur läßt sich mit Hilfe der expliziten Darstellung von  $\Lambda_S$  berechnen:

$$\Lambda_S = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Damit erhalten wir

$$\text{Tr}[\Lambda^T \Lambda] = \text{Tr} \begin{pmatrix} \gamma^2(1 + \beta^2) & 2\gamma^2\beta & 0 & 0 \\ 2\gamma^2\beta & \gamma^2(1 + \beta^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$= 2 [\gamma^2(1 + \beta^2) + 1] = 2\gamma^2 [1 + \beta^2 + 1 - \beta^2] = 4\gamma^2. \quad (3.9)$$

Diese Beziehung zusammen mit der Form  $\gamma^2 = 1/(1 - \beta^2)$  des Gammafaktors erlaubt die Berechnung der Geschwindigkeit aus oben berechneten Spur:

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{4}{\text{Tr}[\Lambda^T \Lambda]}. \quad (3.10)$$

Abschließend fassen wir noch einmal zusammen, wie sich die Parameter  $\gamma$  und  $\beta$  eines beliebigen Elementes der Eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe bestimmen lassen:

$$\gamma^2 = \frac{1}{4} \text{Tr}[\Lambda^T \Lambda] \quad (3.11)$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{4}{\text{Tr}[\Lambda^T \Lambda]}. \quad (3.12)$$

## 4 Der allgemeine Lorentz–Boost

Das besondere Merkmal einer Speziellen Lorentztransformation  $\Lambda_S$  ist ihre formale Ähnlichkeit mit einer Drehung in zwei Raumdimensionen. Hierbei entspricht der Drehwinkel der Rapidität  $\chi$  mit

$$\tanh(\chi) = \beta = \frac{v}{c}, \quad (4.1)$$

und in der Drehmatrix werden die trigonometrischen Funktionen durch hyperbolische ersetzt. Falls die Richtung der Relativgeschwindigkeit mit der  $x^1$ -Achse zusammenfällt, lautet die für die Berechnung von Komponenten zuständige Spezielle Lorentztransformation (vgl. Abschnitt 2.2)

$$\Lambda_S = \begin{pmatrix} \cosh(\chi) & -\sinh(\chi) & 0 & 0 \\ -\sinh(\chi) & \cosh(\chi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

In diesem Kapitel wollen wir untersuchen, wie sich die Speziellen Lorentztransformationen  $\Lambda_S$  zu beliebigen Boosttransformationen  $\Lambda_B$  erweitern lassen. Bei einer Speziellen Lorentztransformation fällt der Vektor der Geschwindigkeit mit einer Koordinatenachse zusammen, während bei einer allgemeinen Boosttransformation der Vektor der Geschwindigkeit beliebig orientiert sein kann. Dieses Programm ähnelt dem Übergang von Drehungen um die Koordinatenachsen zu Drehungen um eine beliebig orientierte Achse [3]. Elegant und ein wenig exotisch ist die Beschreibung allgemeiner Rotationen mit Hilfe von Quaternionen. In der Physik geläufiger ist die Interpretation der Drehgruppe  $SO(3)$  als Lie–Gruppe mit zugehöriger Lie–Algebra  $\mathfrak{so}(3)$ , welche u.a. eine einfache Ableitung der Rotationsformeln von Olinde Rodrigues [2] ermöglicht.

Für reine Lorentztransformationen besteht der dem Quaternionenbild vergleichbare Zugang darin, den Weltvektor als komplexe hermitesche  $2 \times 2$ -Matrix zu schreiben. Diese Klasse von Matrizen bildet einen vierdimensionalen reellen Vektorraum und ist damit zum Minkowskiraum isomorph. Dem Weltvektor wird hierbei die Basis der Paulischen Spinmatrizen untergeschoben, was einer Abbildung auf eine komplexe hermitesche  $2 \times 2$ -Matrix entspricht. Dieser Prozeß macht aus dem Weltvektor ein Element der Matrixgruppe  $GL(2, \mathbb{C})$ . In den nächsten Abschnitten beschäftigen wir uns zunächst mit den Eigenschaften der Paulischen Spinmatrizen und der Einführung von Lorentzspinoren und konstruieren im Anschluß eine allgemeine reine Lorentztransformation explizit.

## 4.1 Quaternionen und die Paulischen Spinmatrizen

In unserer Betrachtung von Rotationen [3] haben wir die Paulischen Spinmatrizen als Matrixdarstellungen der imaginären Quaternionen  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  und  $\mathbf{k}$  eingeführt. Quaternionen lassen sich als besondere komplexe Zahlen auffassen, die statt einer imaginären Dimension ( $i$ ) deren drei ( $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ) besitzen. Multipliziert man diese drei imaginären Einheiten miteinander, gehorchen sie den Regeln

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1, \quad (4.3)$$

woraus sich die Multiplikationstabelle

$$\begin{aligned} \mathbf{ij} &= -\mathbf{ji} = \mathbf{k} \\ \mathbf{jk} &= -\mathbf{kj} = \mathbf{i} \\ \mathbf{ki} &= -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \end{aligned} \quad (4.4)$$

ableiten läßt. Die obenstehende Tabelle zeigt, daß die Multiplikation von Quaternionen nicht kommutativ ist. Ergänzt werden die imaginären Einheiten durch die reelle Einheit 1, deren Multiplikation von links oder rechts jedes Quaternion unverändert läßt. Ein beliebiges Quaternion  $\mathbf{Q}$  kann als Linearkombination dieser Basisquaternionen mit reellen Koeffizienten  $a, b, c, d$  dargestellt werden:

$$\mathbf{Q} = a1 + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}. \quad (4.5)$$

Die Multiplikationsregeln der Basisquaternionen sind denen der Paulimatrizen  $\sigma_i$  so ähnlich, daß letztere als Darstellung der Basisquaternionen verwendet werden können:

$$\mathbf{i} = -i\sigma_1 \quad \mathbf{j} = -i\sigma_2 \quad \mathbf{k} = -i\sigma_3 \quad (4.6)$$

Die Paulimatrizen sind drei komplexe  $2 \times 2$ - Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

die, wie sich unschwer nachvollziehen läßt, hermitesch, unitär und spurfrei sind. Sie erfüllen die Gleichungen

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \mathbb{1} \quad (4.8)$$

sowie die Multiplikationstabelle

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2 &= -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3 \\ \sigma_2\sigma_3 &= -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1 \\ \sigma_3\sigma_1 &= -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2. \end{aligned} \quad (4.9)$$



Wir ergänzen diese drei Matrizen durch die Einheitsmatrix  $\mathbb{1}$ , die ebenfalls hermitesch und unitär, aber nicht spurfrei ist. Alle vier Matrizen bilden eine Basis des Raumes  $GL(2, \mathbb{C})$  der komplexen invertierbaren  $2 \times 2$ -Matrizen, weswegen jede Matrix  $\mathbf{S} \in GL(2, \mathbb{C})$  geschrieben werden kann als

$$\mathbf{S} = a\mathbb{1} + b\boldsymbol{\sigma}_1 + c\boldsymbol{\sigma}_2 + d\boldsymbol{\sigma}_3. \quad (4.10)$$

Die Koeffizienten  $a, b, c$  und  $d$  sind im allgemeinen komplex. Beschränkt man sich auf reelle Zahlen, ist die Matrix  $\mathbf{S}$  hermitesch.

## 4.2 Lorentzspinoren und Transformation des Weltvektors

Mit dem Begriff Spinor wird in der Physik das Verhalten eines Objektes unter Drehungen charakterisiert. Im Rotationstext [3] haben wir Vorgänge betrachtet, welche wie die Quantenzustände eines Spin- $1/2$  Teilchens ihren Ursprungszustand erst nach einer Umdrehung von  $4\pi$  oder  $720^\circ$  wieder einnehmen. Darüberhinaus bezeichnet man jedes Objekt als Spinor, wenn es um dessen Rotationsverhalten geht. Mathematisch betrachtet sind Spinoren Elemente komplexer Vektorräume, die sich durch ihre Dimension unterscheiden. Sie werden mit einem Index gekennzeichnet, der die halbzahligen Werte  $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$  durchläuft:

$S_{(j)}$  :  $j$ -Spinor mit der Dimension  $2j + 1$ .

Der Index  $j$  ist nur ein Name für die Art des Spinors, er ist kein Summationsindex oder der Index einer Tensorkomponente. Damit eine Drehung auf Spinoren wirken kann, benötigt sie in jedem der  $2j + 1$ -dimensionalen Vektorräume einen Stellvertreter in Matrixform. Die Gesamtheit aller dieser  $(2j + 1) \times (2j + 1)$ -Matrizen repräsentiert die Gesamtheit der Rotationen im Vektorraum der  $S_{(j)}$  und wird als Darstellung  $D^{(j)}$  der Drehgruppe bezeichnet:

$D^{(j)}$  : Darstellung der Drehgruppe im Raum  $\mathbb{C}^{2j+1}$ .

Es gibt zwei Matrixgruppen, die als Ausgangspunkt dieser Darstellungen verwendet werden:

- Drehungen von Punkten im dreidimensionalen Ortsvektorraum werden mit Hilfe von Rotationsmatrizen, d.h. Elementen der Gruppe  $SO(3)$  realisiert. Diese agiert selbst im Raum  $\mathbb{R}^3$  und wird dort als Fundamentaldarstellung bezeichnet. Sie ist die reelle Version der Darstellung  $D^{(1)}$ .
- Die Normerhaltung von komplexwertigen Quantenzuständen erfordert es, daß Drehungen in der Quantenmechanik unitäre Operatoren sein müssen. Aus diesem Grund bieten sich für die Rotation von Quantenzuständen die Gruppe  $SU(2)$  und deren Darstellungen als Operatoren an. Die Darstellung  $D^{(1)}$  oder  $\text{spin} - 1$  ist dreidimensional und übernimmt hierbei die Rolle der Drehgruppe  $SO(3)$ .

Diese beiden Matrixgruppen, ihre Darstellungen und die abstrakte Drehgruppe sind bezüglich ihrer Gruppenverknüpfungen (Matrixmultiplikation bzw. Hintereinanderausführung) homomorph, also strukturerhaltend. Sowohl die Gruppe  $SO(3)$  als auch die Gruppe  $SU(2)$  kann auf einen dreidimensionalen Vektorraum wirken, im letzteren Fall über die Darstellung  $D^{(1)}$ . Dessen ungeachtet und obwohl beide Gruppen Drehungen beschreiben sind sie nicht isomorph. Es existiert vielmehr eine Zwei- zu- Eins- Beziehung, die jedem Element der Gruppe  $SO(3)$  die jeweils positive und negative Version eines Elementes der Gruppe  $SU(2)$  zuordnet. Man sagt, die Gruppe  $SU(2)$  überlagert die Gruppe  $SO(3)$  doppelt [1], [3]. Offenbar fängt die Gruppe  $SU(2)$  gewisse Aspekte von Rotationen ein, die im Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  nicht zu Geltung kommen, siehe z.B. [4].

Wir kehren nun zum Thema dieses Artikels zurück und wenden die für Rotationen vorgestellte gruppentheoretische Beschreibung auf Lorentztransformationen an. Lorentztransformationen unterworfenen Objekte bezeichnet man als Lorentzspinoren und erweitert damit die oben beschriebene Spinoridee dergestalt, daß sie auch Lorentztransformationen umfaßt. Zu diesem Zweck führen wir die zu Lorentztransformationen homomorphen Matrixgruppen ein, welche die Rolle der zu Drehungen homomorphen Gruppen  $SO(3)$  und  $SU(2)$  übernehmen:

- Die Rotationsgruppe  $SO(3)$  wird durch die Eigentliche orthochrone Lorentzgruppe  $SO(1,3)$  ersetzt. Eventuell vorhandene Rotationsanteile lassen sich über eine Polarzerlegung abspalten (1.12), wobei die verbleibende Restmatrix symmetrisch ist. Die speziellen Lorentztransformationen der Relativitätstheorie sind Beispiele für Transformationen ohne Rotationsanteil. Reine Rotationen hingegen bilden innerhalb der  $4 \times 4$  – Matrix einer Lorentztransformation einen  $3 \times 3$  – Block, siehe (1.19).
- Die Rolle der Gruppe  $SU(2)$  übernimmt die Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$ , eine überraschend unspezifische und wenig eingeschränkte Menge komplexer  $2 \times 2$  – Matrizen. Ähnlich wie bei der Lorentzgruppe  $SO(1,3)$  können von diesen Matrizen unitäre Anteile mit Hilfe einer Polarzerlegung abgespalten werden (1.8), wobei der verbleibende Rest hermitesch ist.

Im Gegensatz zur Gruppe  $SU(2)$  spielen in der Darstellungstheorie der Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$  die Begriffe Dualität und Adjunktion bezüglich des komplexen Skalarproduktes quantenmechanischer Zustände eine besondere Rolle. Beide beziehen sich auf Aspekte der Wirkung einer Transformation  $U$  auf jeweils einen Faktor im Skalarprodukt zweier Zustände  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathbb{C}^2$ . Betrachten wir zunächst die Definition dieser Begriffe:

$$\langle U^\dagger \beta | \alpha \rangle := \langle \beta | U \alpha \rangle \quad (\text{Adjungierte Transformation}) \quad (4.11)$$

$$\langle U^{(*)} \beta | \alpha \rangle := \langle \beta | U^{-1} \alpha \rangle \quad (\text{Duale Transformation}) \quad (4.12)$$

Für die auf  $|\alpha\rangle$  wirkenden Transformationen  $U$  und  $U^{-1}$  werden korrespondierende auf  $|\beta\rangle$  wirkende Transformationen  $U^\dagger$  und  $U^{(*)}$  gesucht, welche im Skalarprodukt das gleiche Resultat liefern. Durch Entwicklung der Zustände  $|\alpha\rangle$  und  $|\beta\rangle$  in einer orthogonalen

Basis lassen sich die zu  $U$  adjungierten bzw. dualen Transformationen leicht explizit berechnen [3]:

$$U^\dagger = U^{*T} \quad (4.13)$$

$$U^{(*)} = (U^{-1})^{*T} \quad (4.14)$$

Bei unitären Transformationen können wir in (4.11) die Unitaritätsbedingung  $UU^\dagger = \mathbb{1}$  ausnutzen:

$$\langle \beta | U\alpha \rangle = \langle U^{-1}\beta | \alpha \rangle. \quad (4.15)$$

Diese Gleichung wird nach dem Austausch  $U \Leftrightarrow U^{-1}$  zu einer Aussage über die duale Transformation  $U^{(*)}$ , indem man sie mit (4.12) in Beziehung setzt und folgendermaßen liest [1]:

$$\langle U^{(*)}\beta | \alpha \rangle := \langle \beta | U^{-1}\alpha \rangle = \langle U\beta | \alpha \rangle. \quad (4.16)$$

Wie in (4.16) zu sehen heben sich bei einer unitären Transformation Inversion und Adjunktion auf, wodurch diese mit  $U^{(*)} = U$  selbstdual wird. Es handelt sich bei diesem Unterschied zwischen regulärer und dualer Transformation um die komplexe Version des Unterschieds zwischen kontravarianter und kovarianter Koordinatentransformation. Letzterer verschwindet ebenfalls wenn die Transformation orthogonal, also die reelle Version einer unitären Transformation ist. Der Sinn der Gleichung (4.16) wird offenbar, wenn man sich  $U$  als Drehung veranschaulicht: Der Wert des Skalarproduktes hängt von der relativen Position der Vektoren  $|\alpha\rangle$  und  $|\beta\rangle$  ab. Es ist unerheblich ob  $|\beta\rangle$  um  $U$  „vorgedreht“ oder  $|\alpha\rangle$  um  $U^{-1}$  „zurückgedreht“ wird, denn das Skalarprodukt ist aufgrund der relativen Position der Vektoren nach der Transformation in beiden Fällen gleich.

Lorentztransformationen sind keine Darstellungen der Gruppe  $SU(2)$  sondern der Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$ , deren Elemente  $L$  nicht selbstdual sind:

$$\langle L^{(*)}\beta | \alpha \rangle := \langle \beta | L^{-1}\alpha \rangle = \langle (L^{-1})^\dagger\beta | \alpha \rangle \neq \langle L\beta | \alpha \rangle. \quad (4.17)$$

Wie kontra- und kovariante Indexgruppen durch Hoch- bzw. Tiefstellung unterschieden werden, kennzeichnet man Lorentzspinoren mit zwei Indizes  $j$  und  $k$ , die jeweils getrennt die halbzahligen Werte  $0, \frac{1}{2}, 1, \dots$  durchlaufen:

$$S_{(jk)} : j, k\text{-Lorentzspinor mit der Dimension } (2j + 1)(2k + 1).$$

Lorentzspinoren haben das Transformationsverhalten von tensoriellen Produkten, deren einzelne Faktoren unterschiedliche Transformationsmatrizen verwenden:  $L$  transformiert den Faktor ( $j$ ) und  $L^*$  den Faktor ( $k$ ). Im letzteren Fall muß die komplexe Konjugation als Teil der Adjunktion der Transformation explizit hinzugefügt werden. Bei Verwendung des Riccikalculus markiert man in Tensorkomponenten die Indizes dieses Typs mit einem Punkt, der Term  $T_{\alpha\dot{\beta}}$  ist ein Beispiel für diese Schreibweise. Läßt

man ein Element  $L \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  auf einen Lorentzspinor  $S_{(jk)}$  wirken, geschieht das über die Darstellung  $D^{(jk)}$  dieses Elements im zugehörigen Spinorraum der Dimension  $(2j+1)(2k+1)$ . Zwei Darstellungen dieses Typs wirken auf den Raum  $\mathbb{C}^2$ :

- $D^{(\frac{1}{2}, 0)}$ : Die Gruppenelemente  $L$  selbst mit den Komponenten  $L_\alpha^\beta$ .
- $D^{(0, \frac{1}{2})}$ : Die komplex konjugierte Version von  $L$  mit den Komponenten  $L_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$ .

Beide Darstellungen sind Fundamentaldarstellungen der Gruppe  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ .

Bei der Untersuchung von Rotationen [3] hatten wir festgestellt, daß jeder Ortsvektor  $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$  mit Hilfe der Paulimatrizen  $\sigma_i$  auf eine spurfreie hermitesche Matrix abgebildet werden kann:

$$\underline{x} \rightarrow \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix} = x^1 \sigma_1 + x^2 \sigma_2 + x^3 \sigma_3. \quad (4.18)$$

Unterwirft man die Ortsvektormatrix  $\mathbf{x}$  einer Ähnlichkeitstransformation mit unitären Matrizen

$$\mathbf{x}' = U \mathbf{x} U^{-1} \quad U \in \text{SU}(2), \quad (4.19)$$

ergeben sich für diese Transformation folgende Eigenschaften:

- Das Ergebnis  $\mathbf{x}'$  ist wieder eine spurlose hermitesche Matrix und bleibt somit als Ortsvektor interpretierbar.
- Die Determinante  $\det[\mathbf{x}] = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$  ändert sich durch diese Transformation nicht, womit die euklidische Länge von  $\underline{x}$  erhalten bleibt.

Damit wirkt die unitäre Matrix  $U$  auf den Vektor  $\underline{x}$  wie eine Rotation.  $\underline{x}$  ist ein Element des  $\mathbb{R}^3$  und somit in seinen Transformationseigenschaften bezüglich der Gruppe  $\text{SU}(2)$  ein (1)–Spinor. Die Transformationsvorschrift (4.19) kann als Konstruktionsvorgabe für die Darstellung  $\text{spin} - 1$  der Gruppe  $\text{SU}(2)$  verstanden werden. Da der Ortsvektor vor und nach der Transformation reell ist, ermöglicht die Ähnlichkeitstransformation (4.19) insbesondere die Berechnung einer der unitären Matrix  $U$  zugeordneten Drehmatrix  $R \in \text{SO}(3)$ .

Vor diesem Hintergrund liegt es im Hinblick auf Lorentztransformationen nahe, die Paulimatrizen  $\sigma_i$  durch die Matrix  $\sigma_0 = \mathbb{1}$  zu ergänzen und den Ortsvektor zum Weltvektor zu erweitern:

$$\mathbf{x} \rightarrow \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = x^0 \sigma_0 + x^1 \sigma_1 + x^2 \sigma_2 + x^3 \sigma_3 = x^\mu \sigma_\mu. \quad (4.20)$$

Drei Typen von Lorentzspinoren sind vierdimensional und kommen für die Beschreibung des Weltvektors (4.20) in Frage:  $(0, \frac{3}{2})$ ,  $(\frac{3}{2}, 0)$  und  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Die für die Transformation von Lorentzspinoren zuständige Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$  umfaßt  $SU(2)$  als Untergruppe. Beschränkt man sich auf unitäre Matrizen, reduziert sich nur die Darstellung  $D^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$  auf die für Rotationen bekannte Form. In dieser Darstellung wirkt  $L$  auf  $\mathbf{x}$  wie folgt

$$\mathbf{x}'_{\mu\dot{\nu}} = \mathbf{x}_{\alpha\dot{\beta}} L_{\mu}^{\alpha} L_{\dot{\nu}}^{*\dot{\beta}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}' = L \mathbf{x} L^{\dagger}, \quad (4.21)$$

wobei wir diese Wirkung sowohl im Riccikalcul als auch als Matrixoperation formuliert haben. Tatsächlich wird (4.21) im Spezialfall unitärer Matrizen wegen  $U^{\dagger} = U^{-1}$  zur Ähnlichkeitstransformation (4.19). Die für Lorentztransformationen notwendigen Merkmale bleiben hierbei erhalten:

- Die transformierte Weltvektormatrix  $\mathbf{x}'$  ist wieder hermitesch und somit als Weltvektor interpretierbar:

$$\mathbf{x}'^{\dagger} = L^{\dagger\dagger} \mathbf{x}^{\dagger} L^{\dagger} = L \mathbf{x} L^{\dagger} = \mathbf{x}'. \quad (4.22)$$

- Mit  $\det[L] = 1$  bleibt die Determinante der transformierten Weltvektormatrix  $\mathbf{x}'$  erhalten:

$$\det[\mathbf{x}'] = \det[L] \cdot \det[\mathbf{x}] \cdot \det[L^{\dagger}] = |\det[L]|^2 \cdot \det[\mathbf{x}] = \det[\mathbf{x}]. \quad (4.23)$$

Berechnet man sie explizit, erkennt man, daß sie die Länge des Weltvektors bzw. die invariante Eigenzeit repräsentiert:

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{x}] &= (x^0 + x^3)(x^0 - x^3) - (x^1 + ix^2)(x^1 - ix^2) \\ &= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Damit ist die Darstellung  $D^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$  bezüglich der Minkowskimetrik isometrisch und beschreibt tatsächlich eine Lorentztransformation.

- Die Spur der Weltvektormatrix  $\mathbf{x}$  lautet  $\text{Tr}[\mathbf{x}] = 2x^0$  und bleibt unter (4.21) nicht erhalten. Da die Zeitkomponente des Weltvektors keine Lorentzinvariante ist, besteht hierfür auch keine Notwendigkeit.

Damit haben wir den für Rotationen existierenden Homomorphismus zwischen den Gruppen  $SU(2)$  und  $SO(3)$  dergestalt erweitert, daß er die Gruppen  $SL(2, \mathbb{C})$  und  $SO(1,3)$  umfaßt. Wie im Rotationsfall erhält dieser Homomorphismus zwar die Struktur der Gruppenverknüpfung, ist aber trotzdem kein Isomorphismus. Es entsteht vielmehr eine Zwei- zu- Eins- Beziehung, in der jedem Element der Gruppe  $SO(1,3)$  die jeweils positive und negative Version eines Elementes der Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$  zugeordnet wird. Diese Art von Beziehung nennt man „doppelte Überlagerung“.

### 4.3 Lorentz–Boosts als Darstellung der Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$

Die Matrix  $L$  ist als Element der Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$  invertierbar und kann mit Hilfe einer Polarzerlegung eindeutig in einen unitären Anteil  $U$  und einen hermiteschen Anteil  $L_B$  aufgespalten werden, vgl. (1.8):

$$\begin{aligned} L &= UL_B && \text{(entspricht } \Lambda \in SO(1, 3)) \\ UU^\dagger &= 1 && \text{(entspricht } R \in SO(3)) \\ L_B^\dagger &= L_B && \text{(entspricht } \Lambda_B \in SO(1, 3)). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Den Rotationsanteil  $U$  haben wir bereits in [3] untersucht und u.a. eine explizite Darstellung als Element der Gruppe  $SO(3)$  gefunden. Ausgangspunkt dieser Betrachtung war die Einführung von Quaternionen, mit deren Hilfe eine Drehung aus der Angabe von Drehwinkel und Drehachse konstruiert werden konnte. Die Quaternionenschreibweise für unitäre Matrizen entspricht der Darstellung (4.10) in der Basis von Paulimatrizen mit reellem  $a$  und imaginären  $b$ ,  $c$  und  $d$ .

Stellt man den Boostanteil  $L_B$  ebenfalls in dieser Basis dar, müssen zur Gewährleistung der Hermitezität alle Koeffizienten reell sein. In Analogie zur Quaternionendarstellung einer Rotation lautet der Lorentz–Boost  $L_B$

$$\begin{aligned} L_B &= e^{-(\chi/2)\mathbf{n}} = \cosh(\chi/2)\sigma_0 - \sinh(\chi/2)\mathbf{n} \\ \mathbf{n} &= n^1\sigma_1 + n^2\sigma_2 + n^3\sigma_3 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Ähnlich wie bei Olinde Rodrigues' Beschreibung einer Rotation mit Hilfe des Halbwinkels [2] haben wir zur Beschreibung des Lorentz–Boosts in (4.26) die „Halbrapidität“  $\chi/2$  eingeführt. Damit wird eine Boosttransformation durch folgende Größen parametrisiert:

- $\chi$  : Rapidität, entspricht dem Betrag der Boost– Geschwindigkeit
- $n^1$  :  $x$ –Komponente des Normalenvektors  $\underline{n}$  der Boost– Geschwindigkeit
- $n^2$  :  $y$ –Komponente des Normalenvektors  $\underline{n}$  der Boost– Geschwindigkeit
- $n^3$  :  $z$ –Komponente des Normalenvektors  $\underline{n}$  der Boost– Geschwindigkeit.

Die Exponentialfunktion in (4.26) ist als Potenzreihenentwicklung des Operators  $\mathbf{n}$  zu verstehen, dessen gerade Potenzen im  $\cosh$  und dessen ungerade Potenzen im  $\sinh$  zusammengefaßt wurden. Auf diese Weise entsteht das Gegenstück zur Eulerschen Formel, deren Gebrauch bei der Hintereinanderausführung zweier Boosts zu empfehlen ist. Im allgemeinen kommutieren die den Normalenvektoren zugeordneten Operatoren  $\mathbf{n}$  nämlich nicht, weswegen die bekannten Exponentialgesetze durch die Baker–Campbell– Hausdorff– Formel ersetzt werden müssen. Aus dem Vergleich von (4.26) und (4.10) lassen sich die Koeffizienten der Transformation ablesen:

$$a = \cosh(\chi/2) \quad b = -\sinh(\chi/2)n^1 \quad c = -\sinh(\chi/2)n^2 \quad d = -\sinh(\chi/2)n^3. \tag{4.27}$$

Das Minuszeichen entspricht dem Minuszeichen in den Koeffizienten der Speziellen Lorentztransformation (4.2). Die Komponenten des Normalenvektors  $\underline{n}$  erfüllen die Bedingung

$$(n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = 1. \quad (4.28)$$

$L_B$  besitzt als hermitesches Element der Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$  die Gestalt

$$L_B = \begin{pmatrix} a + d & b - ic \\ b + ic & a - d \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

wodurch sich (4.28) als Aussage über die Determinante auffassen läßt, welche diese wie angekündigt auf den Wert

$$\det[L_B] = a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = 1 \quad (4.30)$$

festlegt. Der von  $\underline{n}$  abgeleitete Operator  $\mathbf{n}$  verhält sich selbst wie ein Normalenvektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^2 &= (n^1 \boldsymbol{\sigma}_1 + n^2 \boldsymbol{\sigma}_2 + n^3 \boldsymbol{\sigma}_3)^2 \\ &= [(n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2] \boldsymbol{\sigma}_0 + \dots \\ &\dots + i[n^1 n^2 - n^2 n^1] \boldsymbol{\sigma}_3 + i[n^3 n^1 - n^1 n^3] \boldsymbol{\sigma}_2 + i[n^2 n^3 - n^3 n^2] \boldsymbol{\sigma}_1 \\ &= \mathbb{1}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Schließlich läßt sich zeigen, daß die Boosttransformation zur Rapidität  $-\chi$  die inverse Transformation zu derjenigen mit der Rapidität  $\chi$  ist:

$$L_B(\chi)L_B(-\chi) = e^{-(\chi/2)\mathbf{n}} e^{(\chi/2)\mathbf{n}} = e^{-[(\chi/2)-(\chi/2)]\mathbf{n}} = \mathbb{1}. \quad (4.32)$$

Hier kommutiert der Operator  $\mathbf{n}$  mit sich selbst, so daß die elementaren Rechenregeln der Exponentialfunktion anwendbar sind.

## 4.4 Additionstheorem für parallele Geschwindigkeiten

In der Relativitätstheorie bedeutet das Addieren von Geschwindigkeiten die Hintereinanderausführung zweier Lorentz-Boosts. Hierbei ist zu beachten, daß die Boosttransformationen innerhalb der Eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe keine Untergruppe bilden, denn sie werden in der Gruppe  $SO(1,3)$  als symmetrische und in der Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$  als hermitesche Matrizen dargestellt. Das Produkt zweier hermitescher bzw. symmetrischer Matrizen ist nicht notwendigerweise selbst wieder hermitesch bzw. symmetrisch, denn für zwei hermitesche Matrizen  $A$  und  $B$  gilt

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA \neq AB. \quad (4.33)$$

Dieses Produkt ist offenbar nur dann hermitesch, wenn  $A$  und  $B$  vertauschen. Das hat zur Konsequenz, daß die Multiplikation hermitescher bzw. symmetrischer Matrizen keine abgeschlossene Verknüpfung ist und daß die Hintereinanderausführung zweier Lorentz-Boosts im allgemeinen keine reine Boosttransformation ergibt. Allerdings kann das Ergebnis mit Hilfe der Polarzerlegung (1.8) immer als das Produkt einer Boosttransformation und einer zusätzlichen Drehung interpretiert werden:

$$\begin{aligned}\Lambda_B(\underline{n}_2, \chi_2) \Lambda_B(\underline{n}_1, \chi_1) &= R(\underline{n}_R, \theta) \Lambda_B(\underline{n}_B, \chi) \\ L_B(\underline{n}_2, \chi_2) L_B(\underline{n}_1, \chi_1) &= U(\underline{n}_R, \theta) L_B(\underline{n}_B, \chi),\end{aligned}\tag{4.34}$$

je nachdem, ob die Matrixgruppe  $SO(1,3)$  oder  $GL(2, \mathbb{C})$  zur Darstellung der Lorentzgruppe herangezogen wird. Die Parameter in (4.34) haben folgende Bedeutung:

- $\underline{n}_1$  : Normalenvektor der Geschwindigkeit des ersten Boosts
- $\underline{n}_2$  : Normalenvektor der Geschwindigkeit des zweiten Boosts
- $\underline{n}_B$  : Normalenvektor der Geschwindigkeit des resultierenden Boosts
- $\underline{n}_R$  : Normalenvektor der Rotationsachse der zusätzlichen Drehung
- $\chi_1$  : Rapidität des ersten Boosts
- $\chi_2$  : Rapidität des zweiten Boosts
- $\chi$  : Rapidität des resultierenden Boosts
- $\theta$  : Rotationswinkel der zusätzlichen Drehung.

Die Drehung  $R(\underline{n}_R, \theta)$  bzw.  $U(\underline{n}_R, \theta)$  heißt „Thomas–Wigner Rotation“ nach Llewellyn Thomas und Eugene Wigner [9], [10]. Von diesem Begriff ist der bekanntere Ausdruck „Thomas Präzession“ abgeleitet, welcher bei der Spindynamik eine Rolle spielt und eine kontinuierliche Drehung beschreibt, die durch die Aneinanderreihung differentieller Lorentztransformationen entsteht.

Wir betrachten nun den Sonderfall zweier gleichgerichteter Boosts, deren Transformationsmatrizen kommutieren und deren Produkt wieder ein reiner Lorentz-Boost ist ohne zusätzliche Thomas–Wigner Rotation. Die Exponentialdarstellung aus (4.26) läßt sich hier direkt verwenden, da der dem Normalenvektor  $\underline{n}$  zugeordnete Operator  $\mathbf{n}$  naturgemäß mit sich selbst vertauscht:

$$L_B(\underline{n}, \chi_2) L_B(\underline{n}, \chi_1) = e^{-(\chi_2/2)\mathbf{n}} e^{-(\chi_1/2)\mathbf{n}} = e^{-[(\chi_1/2)+(\chi_2/2)]\mathbf{n}} = L_B(\underline{n}, \chi_1 + \chi_2).\tag{4.35}$$

Die Hintereinanderausführung zweier gleichgerichteter Boosts entspricht also der Addition ihrer Rapiditäten:

$$\chi = \chi_1 + \chi_2.\tag{4.36}$$

Dem Additionstheorem des Tangens Hyperbolicus zufolge gilt

$$\tanh(\chi) = \tanh(\chi_1 + \chi_2) = \frac{\tanh(\chi_1) + \tanh(\chi_2)}{1 + \tanh(\chi_1) \tanh(\chi_2)},\tag{4.37}$$



woraus sich mit Hilfe von (4.1) das aus der Speziellen Relativitätstheorie bekannte Additionstheorem des  $\beta$ -Faktors bzw. der Geschwindigkeit  $v$  ergibt:

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1v_2/c^2}. \quad (4.38)$$

Während die elementare Beweismethode dieses Theorems Spezielle Lorentztransformationen verwendet [5], erweitert die in diesem Kapitel vorgestellte Herleitung diese Methode und bestätigt somit den Ansatz (4.26). Dieser erhält zwar Hermitezität und Determinante der Ortsvektormatrix, ist darüberhinaus jedoch nur durch die formale Analogie zur Behandlung von Rotationen gerechtfertigt. Daß das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten aus diesem Ansatz folgt, läßt (4.26) weiterhin plausibel erscheinen.

## 4.5 Lorentz-Boosts als Elemente der Gruppe $SO(1,3)$

Ein interessanter Punkt der Untersuchung von Rotationen [3] war die Konstruktion der Rotationsmatrix  $R \in SO(3)$  für eine beliebige Drehung. In diesem Abschnitt betrachten wir die analoge Fragestellung der expliziten Darstellung einer beliebigen Boosttransformation  $\Lambda_B \in SO(1,3)$ . Zu diesem Zweck transformieren wir die Komponenten des Weltvektors (4.20) mit Hilfe von  $L_B$  und lesen anschließend aus dem Ergebnis die Komponenten der Matrix  $\Lambda_B$  ab. Wir werden die Rechnungen mit der allgemein gehaltenen Form (4.29) für  $L_B$  durchführen und erhalten so  $\Lambda_B$  in einer Gestalt, die ähnlich zu derjenigen der allgemeinen Rotation in [3] ist.

Als ersten Schritt berechnen wir das Produkt  $\mathbf{x}L_B^\dagger$ , wobei zu beachten ist, daß aufgrund der Hermitezität der Boosttransformation  $L_B^\dagger = L_B$  gilt. Für eine elegantere Schreibweise bei der Berechnung verwenden wir zunächst indizierte Koeffizienten

$$\{a^\mu\} := \{a, b, c, d\}. \quad (4.39)$$

Griechische Indizes laufen wie üblich über die Werte  $\{0, 1, 2, 3\}$  und lateinische über die Werte  $\{1, 2, 3\}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{x}L_B^\dagger &= (x^\mu \boldsymbol{\sigma}_\mu)(a^\mu \boldsymbol{\sigma}_\mu) = (x^0 \boldsymbol{\sigma}_0 + x^i \boldsymbol{\sigma}_i)(a^0 \boldsymbol{\sigma}_0 + a^i \boldsymbol{\sigma}_i) \\ &= x^0 a^0 \boldsymbol{\sigma}_0 + x^0 (a^i \boldsymbol{\sigma}_i) + a^0 (x^i \boldsymbol{\sigma}_i) + (x^i \boldsymbol{\sigma}_i)(a^i \boldsymbol{\sigma}_i). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Die gleiche Aufspaltung in Zeit- und Ortsindizes wird bei der Berechnung von  $\mathbf{x}'$  beibehalten:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= L_B \mathbf{x} L_B^\dagger \\ &= x^0 (a^0)^2 \boldsymbol{\sigma}_0 + x^0 a^0 (a^i \boldsymbol{\sigma}_i) + (a^0)^2 (x^i \boldsymbol{\sigma}_i) + a^0 (x^i \boldsymbol{\sigma}_i)(a^i \boldsymbol{\sigma}_i) + \dots \\ &\dots + x^0 a^0 (a^i \boldsymbol{\sigma}_i) + x^0 (a^i \boldsymbol{\sigma}_i)(a^i \boldsymbol{\sigma}_i) + a^0 (a^i \boldsymbol{\sigma}_i)(x^i \boldsymbol{\sigma}_i) + (a^i \boldsymbol{\sigma}_i)(x^i \boldsymbol{\sigma}_i)(a^i \boldsymbol{\sigma}_i). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Wir multiplizieren nun die Klammern aus und schreiben die Summen explizit, wobei wir wieder auf die nichtindizierten Koeffizienten zurückgreifen. Die einzelnen Resultate lassen sich unschwer nachvollziehen:

$$(a^i \sigma_i)(a^i \sigma_i) = [b^2 + c^2 + d^2] \sigma_0 \quad (4.42)$$

$$(x^i \sigma_i)(a^i \sigma_i) = [bx^1 + cx^2 + dx^3] \sigma_0 + \dots \quad (4.43)$$

$$\dots + i[x^1 c - x^2 b] \sigma_3 + i[x^3 b - x^1 d] \sigma_2 + i[x^2 d - x^3 c] \sigma_1$$

$$(a^i \sigma_i)(x^i \sigma_i) = [bx^1 + cx^2 + dx^3] \sigma_0 + \dots \quad (4.44)$$

$$\dots + i[bx^2 - cx^1] \sigma_3 + i[dx^1 - bx^3] \sigma_2 + i[cx^3 - dx^2] \sigma_1$$

$$(a^i \sigma_i)(x^i \sigma_i)(a^i \sigma_i) = [(b^2 - c^2 - d^2)x^1 + 2bcx^2 + 2bdx^3] \sigma_1 + \dots \quad (4.45)$$

$$\dots + [(c^2 - b^2 - d^2)x^2 + 2bcx^1 + 2cdx^3] \sigma_2 + \dots$$

$$\dots + [(d^2 - b^2 - c^2)x^3 + 2bdx^1 + 2cdx^2] \sigma_3.$$

Die imaginären Anteile der Ausdrücke (4.43) und (4.44) verschwinden, da in (4.41) nur die Summe beider Ausdrücke vorkommt:

$$(x^i \sigma_i)(a^i \sigma_i) + (a^i \sigma_i)(x^i \sigma_i) = 2[bx^1 + cx^2 + dx^3] \sigma_0. \quad (4.46)$$

Damit sind nach dem Zusammenfassen alle Koeffizienten von (4.41) reell:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= L_B \mathbf{x} L_B^\dagger = x'^0 \sigma_0 + x'^1 \sigma_1 + x'^2 \sigma_2 + x'^3 \sigma_3 \\ &= [(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)x^0 + 2abx^1 + 2acx^2 + 2adx^3] \sigma_0 + \dots \\ &\dots + [(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)x^1 + 2ba^0 + 2bcx^2 + 2bdx^3] \sigma_1 + \dots \\ &\dots + [(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)x^2 + 2ca^0 + 2cbx^1 + 2cdx^3] \sigma_2 + \dots \\ &\dots + [(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)x^3 + 2da^0 + 2dbx^1 + 2dcx^2] \sigma_3. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Aus der Gleichung (4.47) können die Koeffizienten der Boosttransformation  $\Lambda_B$  abgelesen werden:

$$\Lambda_B = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 2ab & 2ac & 2ad \\ 2ab & a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2bc & 2bd \\ 2ac & 2bc & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2cd \\ 2ad & 2bd & 2cd & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Die Parameter  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  enthalten die Rapidität und die Richtungskomponenten des Geschwindigkeitsvektors:

$$a = \cosh(\chi/2) \quad b = -\sinh(\chi/2)n^1 \quad c = -\sinh(\chi/2)n^2 \quad d = -\sinh(\chi/2)n^3. \quad (4.49)$$

Im Internet wird  $\Lambda_B$  üblicherweise in einer Form präsentiert, in der die Rapidität  $\chi$  durch die Größen  $\gamma$  und  $\beta$  ersetzt wird:

$$\cosh(\chi) = \gamma \quad (4.50)$$

$$\sinh(\chi) = \gamma\beta. \quad (4.51)$$

Zur Herleitung verwenden wir einige Rechenregeln mit denen bestimmte Terme hyperbolischer Funktionen des Halbwinkels als Funktionen des Vollwinkels geschrieben werden können:

$$\cosh^2(\chi/2) - \sinh^2(\chi/2) = 1 \quad (4.52)$$

$$\cosh^2(\chi/2) + \sinh^2(\chi/2) = \cosh(\chi) \quad (4.53)$$

$$2 \cosh(\chi/2) \sinh(\chi/2) = \sinh(\chi) \quad (4.54)$$

$$2 \sinh^2(\chi/2) = \cosh(\chi) - 1 \quad (4.55)$$

Mit Hilfe von (4.52) läßt sich eine Beziehung zwischen den den Koeffizienten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  ableiten:

$$a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = 1. \quad (4.56)$$

Damit lassen sich die Diagonalelemente von  $\Lambda_B$  kompakter darstellen:

$$\Lambda_B = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 2ab & 2ac & 2ad \\ 2ab & 1 + 2b^2 & 2bc & 2bd \\ 2ac & 2bc & 1 + 2c^2 & 2cd \\ 2ad & 2bd & 2cd & 1 + 2d^2 \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Setzen wir die Ausdrücke (4.49) für  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  ein und rechnen sie in Funktionen des Vollwinkels um, können wir gewisse Komponenten  $[\Lambda_B]^\mu_\nu$  der Boostmatrix schreiben als:

$$[\Lambda_B]^0_0 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \cosh(\chi) = \gamma \quad (4.58)$$

$$[\Lambda_B]^1_1 = 1 + 2b^2 = 1 + (\cosh(\chi) - 1) n^{1^2} = 1 + (\gamma - 1) n^{1^2} \quad (4.59)$$

$$[\Lambda_B]^0_1 = 2ab = -\sinh(\chi) n^1 = -\gamma\beta n^1 \quad (4.60)$$

$$[\Lambda_B]^1_2 = 2bc = (\cosh(\chi) - 1) n^1 n^2 = (\gamma - 1) n^1 n^2. \quad (4.61)$$

Die restlichen Komponenten lassen sich auf einfache Weise von den oben berechneten ableiten und die Matrix des Lorentz-Boosts in  $\gamma$  und  $\beta$  ausgedrückt lautet

$$\Lambda_B = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta n^1 & -\gamma\beta n^2 & -\gamma\beta n^3 \\ -\gamma\beta n^1 & (\gamma - 1) n^{1^2} + 1 & (\gamma - 1) n^1 n^2 & (\gamma - 1) n^1 n^3 \\ -\gamma\beta n^2 & (\gamma - 1) n^1 n^2 & (\gamma - 1) n^{2^2} + 1 & (\gamma - 1) n^2 n^3 \\ -\gamma\beta n^3 & (\gamma - 1) n^1 n^3 & (\gamma - 1) n^2 n^3 & (\gamma - 1) n^{3^2} + 1 \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

Schließlich wollen wir noch prüfen, ob Geschwindigkeiten entlang der Koordinatenachsen die korrekten Speziellen Lorentztransformationen reproduzieren. Für die Spezielle Lorentztransformation entlang der räumlichen Achse  $i$  gilt

$$n^i = 1, \quad n^k = 0 \quad (\text{für } k \neq i). \quad (4.63)$$

Wir bezeichnen diese Speziellen Lorentztransformationen mit  $\Lambda_S^{(i)}$  und erhalten:

$$\Lambda_S^{(1)} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\chi) & -\sinh(\chi) & 0 & 0 \\ -\sinh(\chi) & \cosh(\chi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

$$\Lambda_S^{(2)} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\chi) & 0 & -\sinh(\chi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh(\chi) & 0 & \cosh(\chi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

$$\Lambda_S^{(3)} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\chi) & 0 & 0 & -\sinh(\chi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh(\chi) & 0 & 0 & \cosh(\chi) \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

Offenbar generiert die Form (4.62) einer allgemeinen Lorentz–Boosttransformation tatsächlich die korrekten Speziellen Lorentztransformationen  $\Lambda_S^{(i)}$ , was als weitere Bestätigung des Ansatzes (4.26) gelten kann.

## 4.6 Lorentz–Boosts und die Lie–Algebra $\mathfrak{so}(1,3)$

Studiert man die mathematisch–physikalische Literatur zu Rotationen, Lorentztransformationen und anderen Symmetrieoperationen, kommt man um eine Auseinandersetzung mit der Theorie der Lie–Gruppen nicht herum. Wir haben z.B. in der Abhandlung [3] zu Rotationen festgestellt, daß die Kenntnis der Lie–Algebra  $\mathfrak{so}(3)$  eine einfache Herleitung der Rotationsformel von Olinde Rodrigues gestattet. In diesem Abschnitt wollen wir dieses Programm für die Lorentzgruppe  $SO(1,3)$  wiederholen und herausfinden, wie das Gegenstück der Rodrigues–Rotationsformel für reine Lorentztransformationen aussieht.

Wir beginnen mit der Untersuchung der Matriceigenschaften, welche für die Mitglieder von  $SO(1,3)$  und  $\mathfrak{so}(1,3)$  verbindlich sind. Die durch die Minkowskimetrik induzierte Isometrieforderung an die Elemente  $\Lambda$  der Gruppe  $SO(1,3)$  haben wir bereits in (1.2) beschrieben:

$$\Lambda g \Lambda^T = g. \quad (4.67)$$

Lie-Gruppe und Lie-Algebra stehen im gleichen Verhältnis wie eine Differenzierbare Mannigfaltigkeit zu einem ihrer Tangentialvektorräume. Die lokalen Eigenschaften bestimmen jeden Punkt einer Mannigfaltigkeit bzw. einer Lie-Gruppe gleichermaßen, weshalb sie sich auch in jedem Punkt wiederfinden. Insbesondere läßt sich eine Lie-Gruppe ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Umgebung des Einselementes  $\Lambda = \mathbb{1}$  studieren, welchem das Nullelement der Lie-Algebra zugeordnet wird. Unter diesem Gesichtspunkt betrachten wir nun in der Gruppe der Lorentztransformationen eine Kurve  $\Lambda(t)$  der Gestalt

$$\Lambda(t) = e^{tM} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}. \quad (4.68)$$

Der Theorie der Lie-Gruppen zufolge erzeugt die Exponentialabbildung aus Elementen der Lie-Algebra Mitglieder der zugehörigen Lie-Gruppe. Umgekehrt erhält man durch das Ableiten einer Kurve von Gruppenelementen in  $t=0$  ein Element der Lie-Algebra. Dieser Prozeß entspricht dem Erzeugen eines Tangentialvektors durch das Differenzieren einer Kurve in einer Punktmannigfaltigkeit. Wir nutzen diesen Umstand aus und differenzieren (4.67) in der Umgebung des Einselementes der Lorentzgruppe, d.h. an der Stelle  $t=0$ . Auf diese Weise entsteht aus der Isometrieforderung an die Gruppenelemente  $\Lambda$  aus  $\text{SO}(1,3)$  eine Forderung an die Elemente  $M$  der Lie-Algebra  $\mathfrak{so}(1,3)$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \Lambda(t) g \Lambda^T(t) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \Lambda(t) \cdot g \Lambda^T(t) \right|_{t=0} + \Lambda(t) g \cdot \left. \frac{d}{dt} \Lambda^T(t) \right|_{t=0} \\ &= Mg \mathbb{1} + \mathbb{1} g M^T = 0 \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\Rightarrow (Mg)^T = -Mg. \quad (4.70)$$

Im Letzten Schritt haben wir von der Symmetrie  $g^T = g$  des Metrischen Tensors Gebrauch gemacht. Mit (4.70) ist zwar nicht  $M$  schiefsymmetrisch, wohl aber das Produkt  $Mg$ . Diese „erweiterte Schiefsymmetrie“ wird im Fall einer euklidischen Metrik mit  $g = \mathbb{1}$  zur echten Schiefsymmetrie wie beispielsweise im Fall der Lie Algebra  $\mathfrak{so}(3)$ . Die Eigenschaften (4.67) und (4.70) passen gut zu den Mitgliedschaften von  $\Lambda \in \text{SO}(1,3)$  und  $M \in \mathfrak{so}(1,3)$ :

- Die Matrixmultiplikation ist unter der Isometrieforderung abgeschlossen, denn es gilt

$$\Lambda_1 \Lambda_2 g (\Lambda_1 \Lambda_2)^T = \Lambda_1 \Lambda_2 g \Lambda_2^T \Lambda_1^T = \Lambda_1 g \Lambda_1^T = g. \quad (4.71)$$

Eine Linearkombination von Lorentztransformationen erfüllt die Isometrieforderung im Allgemeinen nicht und ist daher selbst keine Lorentztransformation. Letztere bilden somit bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe, aber bezüglich der Addition keinen Vektorraum.

- Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die erweiterte Schiefsymmetrie (4.70) der Matrizen  $M$  für Linearkombinationen erhalten bleibt. Das Matrixprodukt

zweier Elemente  $M_1$  und  $M_2$  hingegen besitzt diese Eigenschaft nicht:

$$\begin{aligned} (M_1 M_2 g)^T &= (M_1 g g^{-1} M_2 g)^T = (M_2 g)^T g^{-1} (M_1 g)^T \\ &= M_2 g g^{-1} M_1 g = M_2 M_1 g \neq -M_1 M_2 g. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Beim Übergang von der ersten zur zweiten Zeile wurden (4.70) und die Symmetrie des Metrischen Tensors ausgenutzt. Die Lie-Klammer, welche hier die Form eines Kommutators besitzt, darf als Algebraoperation von  $\mathfrak{so}(1,3)$  nicht aus der Klasse der erweitert schiefsymmetrischen Matrizen  $M$  herausführen:

$$\begin{aligned} ([M_1, M_2] g)^T &= (M_1 M_2 g)^T - (M_2 M_1 g)^T \\ &= M_2 M_1 g - M_1 M_2 g = -[M_1, M_2] g. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Bei der Berechnung der transponierten Produkte konnten wir auf (4.72) zurückgreifen. Die hier beschriebenen Eigenschaften machen die erweitert schiefsymmetrischen Matrizen zu einem Vektorraum und zu einer Algebra in Bezug auf die Lie-Klammer; bezüglich der Matrixmultiplikation bilden sie jedoch keine Gruppe.

Als nächstes konstruieren wir eine Basis für die Lie-Algebra  $\mathfrak{so}(1,3)$ , indem wir als Zwischenschritt eine Basis für die schiefsymmetrischen  $4 \times 4$ -Matrizen  $Mg$  suchen. Der naheliegendste Ansatz hierfür lautet:

$$\begin{aligned} M_1 g &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & M_4 g &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ M_2 g &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & M_5 g &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ M_3 g &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & M_6 g &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Die Basismatrizen  $M_i$  selbst erhält man durch Rechtsmultiplikation mit  $g^{-1}$ , wobei drei schiefsymmetrische und drei symmetrische Matrizen entstehen. Es ist an dieser Stelle

sinnvoll, die Bezeichnung der Basismatrizen zu wechseln:

$$\begin{aligned}
P_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & J_x &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
P_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & J_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
P_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & J_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Bei den Basismatrizen  $J_x$ ,  $J_y$  und  $J_z$  handelt es sich offensichtlich um die um eine „Null-Dimension“ erweiterten Generatoren der Drehgruppe  $SO(3)$  [3], welche auf die hinzugefügte Dimension allerdings keine Wirkung haben. Die restlichen Basismatrizen  $P_x$ ,  $P_y$  und  $P_z$  involvieren gerade diese neu hinzugekommene Null- oder Zeitdimension, weshalb sich ihre Interpretation als Generatoren von Speziellen Lorentztransformationen entlang der Koordinatenachsen geradezu anbietet. Alle sechs Basismatrizen entstehen durch Differentiation der entsprechenden Elemente der Lorentz- bzw. Drehgruppe, vergleiche hierzu (4.64)–(4.66) und [3]:

$$P_x = -\frac{d}{dt} \Lambda_S^{(1)}(t) \Big|_{t=0} \quad P_y = -\frac{d}{dt} \Lambda_S^{(2)}(t) \Big|_{t=0} \quad P_z = -\frac{d}{dt} \Lambda_S^{(3)}(t) \Big|_{t=0} \tag{4.76}$$

$$J_x = \frac{d}{dt} \mathbf{R}(\underline{e}_x, t) \Big|_{t=0} \quad J_y = \frac{d}{dt} \mathbf{R}(\underline{e}_y, t) \Big|_{t=0} \quad J_z = \frac{d}{dt} \mathbf{R}(\underline{e}_z, t) \Big|_{t=0} \tag{4.77}$$

Das Minuszeichen in (4.76) ist das Resultat der am Anfang dieses Kapitels vereinbarten Konventionen bezüglich der Basiswechsellmatrix. Der Parameter  $t$  hat die physikalische Bedeutung der Rapidität  $\chi$  bei Lorentzboosts bzw. des Drehwinkels  $\theta$  bei Rotationen.

Wie sich durch explizite Berechnung leicht feststellen läßt, zerfallen die Strukturkoeffizienten in mehrere Gruppen. Für die Boostgeneratoren gilt

$$\left. \begin{aligned} [P_x, P_y] &= P_z \\ [P_y, P_z] &= P_x \\ [P_z, P_x] &= P_y \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_{ij}^k = \begin{cases} 1 & ijk \text{ gerade Permutation von } xyz \\ -1 & ijk \text{ ungerade Permutation von } xyz \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.78}$$

Für die Rotationsgeneratoren gilt:

$$\left. \begin{aligned} [J_x, J_y] &= J_z \\ [J_y, J_z] &= J_x \\ [J_z, J_x] &= J_y \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_{ij}^k = \begin{cases} 1 & ijk \text{ gerade Permutation von } xyz \\ -1 & ijk \text{ ungerade Permutation von } xyz \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.79}$$

Kommutatoren, die beide Gruppen von Generatoren mischen, haben die Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} [P_x, J_y] &= [J_x, P_y] = P_z \\ [P_y, J_z] &= [J_y, P_z] = P_x \\ [P_z, J_x] &= [J_z, P_x] = P_y \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_{ij}^k = \begin{cases} 1 & ijk \text{ gerade Pm.}(xyz) \\ -1 & ijk \text{ ungerade Pm.}(xyz) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.80)$$

In Abschnitt 1.2 haben wir bereits festgestellt, daß die Rotationsgruppe  $SO(3)$  in der Lorentzgruppe  $SO(1,3)$  enthalten ist. Dieses drückt sich bei der Lie-Algebra  $\mathfrak{so}(1,3)$  darin aus, daß deren Basis diejenige der Lie-Algebra  $\mathfrak{so}(3)$  erweitert. Im Folgenden wollen wir uns auf reine Lorentztransformationen konzentrieren und beschränken uns daher für den Rest des Abschnittes auf den von den  $P_i$  aufgespannten Unterraum der Lie-Algebra  $\mathfrak{so}(1,3)$ .

Die Generatoren  $P_x, P_y$  und  $P_z$  der Boosts entlang der Koordinatenachsen ermöglichen eine Art Achse-Winkel Konstruktion eines allgemeinen Boosts. Hierfür wählen wir die Parametrisierung innerhalb der Lie-Algebra  $\mathfrak{so}(1,3)$  folgendermaßen:

$$t \mathbf{n} := t(n^x P_x + n^y P_y + n^z P_z) \quad \text{mit} \quad (n^x)^2 + (n^y)^2 + (n^z)^2 = 1. \quad (4.81)$$

Die hier eingeführte Größe  $\mathbf{n}$  ist die Darstellung eines Richtungsvektors  $\underline{n}$  in der Lie-Algebra  $\mathfrak{so}(1,3)$  und der Parameter  $t$  steht für die Rapidität. Aus diesen Elementen der Lie-Algebra erzeugen wir die zugehörigen Lorentztransformationen  $\Lambda(\underline{n}, t)$  durch Anwendung der Exponentialabbildung:

$$\Lambda(\underline{n}, t) = e^{t \mathbf{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (t \mathbf{n})^k. \quad (4.82)$$

An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die Generatoren  $P_i$  nicht kommutieren (4.78) und daß somit die elementaren Rechenregeln für die Exponentialfunktion nicht anwendbar sind. Eine Zerlegung nach dem Vorbild der Eulerschen Formel (4.26) ist ebenfalls nicht möglich, da  $\mathbf{n}^2 = \pm 1$  in diesem Fall nicht gilt. Stattdessen müssen wir die Potenzreihenentwicklung (4.82) auswerten, über die die Exponentialfunktion definiert ist, und benötigen hierfür weitere Informationen zu den Potenzen des Richtungsvektors  $\mathbf{n}$ . Zunächst fassen wir diesen in einer Matrix zusammen:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 & n^x & n^y & n^z \\ n^x & 0 & 0 & 0 \\ n^y & 0 & 0 & 0 \\ n^z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.83)$$



Die Potenzen von  $\mathbf{n}$  lassen sich durch explizite Berechnung bestimmen:

$$\mathbf{n}^0 = \mathbb{1} \quad (4.84)$$

$$\mathbf{n}^1 = \begin{pmatrix} 0 & n^x & n^y & n^z \\ n^x & 0 & 0 & 0 \\ n^y & 0 & 0 & 0 \\ n^z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.85)$$

$$\mathbf{n}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n^{x2} & n^x n^y & n^x n^z \\ 0 & n^y n^x & n^{y2} & n^y n^z \\ 0 & n^z n^x & n^z n^y & n^{z2} \end{pmatrix} \quad (4.86)$$

$$\mathbf{n}^3 = \begin{pmatrix} 0 & n^x & n^y & n^z \\ n^x & 0 & 0 & 0 \\ n^y & 0 & 0 & 0 \\ n^z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{n}. \quad (4.87)$$

Bei der Berechnung wurde die Normierung  $(n^x)^2 + (n^y)^2 + (n^z)^2 = 1$  der Richtungsvektorkomponenten ausgenutzt. Die zunächst seltsam aussehende Beziehung  $\mathbf{n}^3 = \mathbf{n}$  ohne daß gleichzeitig  $\mathbf{n}^2 = \mathbb{1}$  gilt erklärt sich aus der Nichtinvertierbarkeit von  $\mathbf{n}$ , dessen Determinante verschwindet. Mit (4.84)–(4.87) sind alle Potenzen des Richtungsvektors bekannt

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^0 &= \mathbb{1} \\ \mathbf{n}^{2k+1} &= \mathbf{n} \quad 0 \leq k < \infty \\ \mathbf{n}^{2k} &= \mathbf{n}^2 \quad 1 \leq k < \infty, \end{aligned} \quad (4.88)$$

und die Exponentialdarstellung (4.82) des Lorentzboosts zerfällt in drei Anteile:

$$\Lambda(\underline{n}, t) = \mathbb{1} + \sum_0^\infty \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \mathbf{n} + \sum_1^\infty \frac{t^{2k}}{(2k)!} \cdot \mathbf{n}^2. \quad (4.89)$$

Die noch verbleibenden Summen enthalten keine Generatoren mehr und können als Potenzreihendarstellungen der Hyperbolischen Funktionen zusammengefaßt werden:

$$\sinh(t) = \sum_0^\infty \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (4.90)$$

$$\cosh(t) = \sum_0^\infty \frac{t^{2k}}{(2k)!}. \quad (4.91)$$

Damit lautet die Darstellung (4.89) des Lorentzboosts folgendermaßen:

$$\Lambda(\underline{n}, t) = \mathbb{1} + \sinh(t) \cdot \mathbf{n} + (\cosh(t) - 1) \cdot \mathbf{n}^2. \quad (4.92)$$

Um herauszufinden, ob diese Form der reinen Lorentztransformation mit dem früher gefundenen Ausdruck (4.62) verträglich ist, ersetzen wir die hyperbolischen Funktionen der Rapidität  $\chi$  durch  $\gamma$  und  $\beta$  und erhalten:

$$\Lambda(\underline{n}, t) = \mathbb{1} - \gamma\beta \cdot \mathbf{n} + (\gamma - 1) \cdot \mathbf{n}^2. \quad (4.93)$$

Das zusätzliche Minuszeichen wurde gemäß (4.60) hinzugefügt um eine Transformationsmatrix für Komponenten und nicht für Basisvektoren zu erhalten. Explizit ausgeschrieben lauten die Terme von (4.93):

$$\gamma\beta \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma\beta n^x & \gamma\beta n^y & \gamma\beta n^z \\ \gamma\beta n^x & 0 & 0 & 0 \\ \gamma\beta n^y & 0 & 0 & 0 \\ \gamma\beta n^z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.94)$$

$$(\gamma - 1) \cdot \mathbf{n}^2 = \begin{pmatrix} \gamma - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\gamma - 1)n^{x2} & (\gamma - 1)n^x n^y & (\gamma - 1)n^x n^z \\ 0 & (\gamma - 1)n^x n^y & (\gamma - 1)n^{y2} & (\gamma - 1)n^y n^z \\ 0 & (\gamma - 1)n^x n^z & (\gamma - 1)n^y n^z & (\gamma - 1)n^{z2} \end{pmatrix}. \quad (4.95)$$

Durch das Zusammensetzen aller drei Anteile von (4.93) erhält die Boostmatrix die Form

$$\Lambda(\underline{n}, t) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta n^x & -\gamma\beta n^y & -\gamma\beta n^z \\ -\gamma\beta n^x & (\gamma - 1)n^{x2} + 1 & (\gamma - 1)n^x n^y & (\gamma - 1)n^x n^z \\ -\gamma\beta n^y & (\gamma - 1)n^x n^y & (\gamma - 1)n^{y2} + 1 & (\gamma - 1)n^y n^z \\ -\gamma\beta n^z & (\gamma - 1)n^x n^z & (\gamma - 1)n^y n^z & (\gamma - 1)n^{z2} + 1 \end{pmatrix}. \quad (4.96)$$

Damit haben wir bewiesen daß die aus der Lie-Algebra  $\mathfrak{so}(1, 3)$  abgeleitete Beschreibung von Lorentz-Boosttransformationen das gleiche Resultat liefert wie die anfangs dieses Kapitels vorgestellte quaternionische Darstellung mit Hilfe von Matrizen der Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$ .

Abschließend wollen wir die Wirkung des Lorentzboosts (4.92) auf einen Weltvektor

$$x = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.97)$$

im Detail untersuchen und auf elementare Vektoroperationen zurückführen. Hierfür

berechnen wir zunächst den Effekt der Potenzen des Richtungsvektors  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{n}^2$  auf  $x$ :

$$\mathbf{n} x = \begin{pmatrix} n^x x + n^y y + n^z z \\ ct n^x \\ ct n^y \\ ct n^z \end{pmatrix} = ((\underline{n}, \underline{x}), ct \underline{n})^T \quad (4.98)$$

$$\mathbf{n}^2 x = \begin{pmatrix} ct \\ (n^x x + n^y y + n^z z) n_x \\ (n^x x + n^y y + n^z z) n_y \\ (n^x x + n^y y + n^z z) n_z \end{pmatrix} = (ct, (\underline{n}, \underline{x}) \underline{n})^T. \quad (4.99)$$

Diese Ergebnisse setzen wir in (4.92) ein und erhalten in Zeit- und Ortskomponenten getrennt

$$\begin{aligned} [\Lambda(\underline{n}, t) \underline{x}]^{(ct)} &= \cosh(t) ct + \sinh(t) (\underline{n}, \underline{x}) \\ [\Lambda(\underline{n}, t) \underline{x}]^{(\underline{x})} &= [\sinh(t) ct + \cosh(t) (\underline{n}, \underline{x})] \underline{n} + \underline{x} - (\underline{n}, \underline{x}) \underline{n}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Diese Form einer reinen Lorentztransformation ist das Gegenstück zur Rotationsformel von Olinde Rodrigues. Um die Ausdrücke besser interpretieren zu können, führen wir die parallele und die orthogonale Komponente von  $\underline{x}$  in Bezug auf die Richtung  $\underline{n}$  des Boosts ein:

$$\begin{aligned} \underline{x}_{\parallel} &= (\underline{n}, \underline{x}) \underline{n} =: x_{\parallel} \underline{n} \\ \underline{x}_{\perp} &= \underline{x} - (\underline{n}, \underline{x}) \underline{n}. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Setzen wir diese Komponenten des Ortsvektors in (4.100) ein, erhält die Wirkung eines Lorentzboosts die Form

$$\begin{aligned} [\Lambda(\underline{n}, t) \underline{x}]^{(ct)} &= \cosh(t) ct + \sinh(t) x_{\parallel} \\ [\Lambda(\underline{n}, t) \underline{x}]^{(\underline{x})} &= [\sinh(t) ct + \cosh(t) x_{\parallel}] \underline{n} + \underline{x}_{\perp}. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Man erkennt jetzt, daß jede reine Lorentztransformation eine Spezielle Lorentztransformation entlang des Richtungsvektors  $\underline{n}$  ist, wobei die zu  $\underline{n}$  senkrechte Komponente von  $\underline{x}$  unverändert bleibt. Auch wenn diese Erkenntnis keine besondere Überraschung ist und eine allgemeine reine Lorentztransformation auch ad hoc hätte so konstruiert werden können, ist (4.102) zumindest eine brauchbare Kontrolle unserer Rechnungen. Die Nebeneinanderstellung dieses Ausdrucks mit der Rodrigues-Rotationsformel zeigt, wie sehr sich beide Gleichungen ähneln [3]:

$$\begin{aligned} [\Lambda(\underline{n}, t) \underline{x}]^{(ct)} &= \cosh(t) ct + \sinh(t) x_{\parallel} \\ [\Lambda(\underline{n}, t) \underline{x}]^{(\underline{x})} &= [\sinh(t) ct + \cosh(t) x_{\parallel}] \underline{n} + \underline{x}_{\perp} \\ \mathbf{R}(\underline{n}, t) \underline{x} &= [\cos(t) \underline{n}_1 - \sin(t) \underline{n}_2] x_{\perp} + \underline{x}_{\parallel}. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Die in der Rodrigues-Formel verwendeten Vektoren  $\underline{n}_1$  und  $\underline{n}_2$  sind eine orthogonale Basis innerhalb der Drehebene, wobei der Vektor  $\underline{n}_1$  in Richtung von  $\underline{x}_\perp$  zeigt. Natürlich besitzen die beiden Parameter  $\underline{n}$  und  $t$  jeweils verschiedene physikalische Bedeutungen;  $\underline{n}$  bezeichnet die Richtung des Lorentzboosts bzw. der Drehachse und  $t$  steht für die Rapidity bzw. den Drehwinkel.

## 5 Die Thomas–Wigner Rotation

Unsere Untersuchung der Addition von Geschwindigkeiten hat in Abschnitt 4.4 ergeben, daß die Hintereinanderausführung zweier Lorentz–Boosts im allgemeinen keine reine Boosttransformation mehr ist. Stattdessen enthält das Resultat einen als „Thomas–Wigner Rotation“ bezeichneten unitären Anteil, der mit Hilfe einer Polarzerlegung (1.8) abgespalten werden kann und den wir in diesem Kapitel genauer untersuchen werden. Zu diesem Zweck vergleichen wir das Produkt zweier Boosts mit der Polarzerlegung einer Lorentztransformation und versuchen, Informationen über die Parameter des Rotationsanteils zu gewinnen.

### 5.1 Gemeinsame Darstellung von Boosts und Rotationen

Für die folgenden Rechnungen benötigen wir für Lorentz–Boosts und Rotationen eine einheitliche Schreibweise. Drei für diesen Zweck geeignete Kandidaten haben wir im letzten Kapitel kennengelernt: Quaternionische Zahlen sowie die Matrixgruppen  $SL(2, \mathbb{C})$  und  $SO(1, 3)$ . Wir wählen die Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$ , weil uns seit Abschnitt 4.1 mit den Paulimatrizen ein Werkzeug zur Verfügung steht, mit dem sich algorithmische Manipulationen an den Elementen dieser Matrixgruppe auf elegante Weise durchführen lassen. Die Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$  repräsentiert die gesamte Eigentliche orthochrone Lorentzgruppe und enthält als Spezialfälle

- hermitesche Matrizen: Diese stehen für Lorentz–Boosts und bilden selbst keine Gruppe.
- spezielle unitäre Matrizen: Diese beschreiben Rotationen und bilden die Untergruppe  $SU(2)$ .

Die explizite Form eines Lorentz–Boosts erhalten wir mit Hilfe der verallgemeinerten Eulerschen Formel (4.26):

$$\begin{aligned} L_B &= e^{-(\chi/2)\mathbf{n}} = \cosh(\chi/2) \boldsymbol{\sigma}_0 - \sinh(\chi/2) \mathbf{n} \\ \mathbf{n} &= n^1 \boldsymbol{\sigma}_1 + n^2 \boldsymbol{\sigma}_2 + n^3 \boldsymbol{\sigma}_3 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Dieser Ausdruck ähnelt sehr der Darstellung einer Rotation als Quaternion [3]:

$$\begin{aligned} U &= e^{(\theta/2)\mathbf{n}} = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \mathbf{n} \\ \mathbf{n} &= n^1 \mathbf{i} + n^2 \mathbf{j} + n^3 \mathbf{k} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Mit Hilfe der Paulimatrizen kann auch das Rotationsquaternion  $U$  als komplexe  $2 \times 2$ –Matrix geschrieben werden:

$$\mathbb{1} = \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \mathbf{i} = -i\boldsymbol{\sigma}_1 \quad \mathbf{j} = -i\boldsymbol{\sigma}_2 \quad \mathbf{k} = -i\boldsymbol{\sigma}_3 \quad (5.3)$$

Die Matrizen  $\sigma_\mu$  sind die Paulimatrizen  $\sigma_i$  ergänzt durch die Einheitsmatrix  $\sigma_0$ . Damit agieren Lorentz-Boosts und Rotationen im gleichen Darstellungsraum:

$$L_B(\underline{n}_B, \chi) = \cosh(\chi/2) \sigma_0 - \sinh(\chi/2) \mathbf{n}_B \quad (5.4)$$

$$U(\underline{n}_R, \theta) = \cos(\theta/2) \sigma_0 - i \sin(\theta/2) \mathbf{n}_R. \quad (5.5)$$

Hierbei ist  $\mathbf{n}_B$  (bzw.  $\underline{n}_B$ ) der Richtungsvektor der Geschwindigkeit des Lorentz-Boosts, und  $\mathbf{n}_R$  (bzw.  $\underline{n}_R$ ) ist der Normalenvektor der Drehachse der Rotation. Wie zu Beginn des Kapitels angedeutet haben die Matrizen  $L_B(\underline{n}_B, \chi)$  und  $U(\underline{n}_R, \theta)$  trotz ihrer ähnlichen Form unterschiedliche Eigenschaften:

$$L_B(\underline{n}_B, \chi) : \text{ Hermitesch, nur Element von } \text{SL}(2, \mathbb{C})$$

$$U(\underline{n}_R, \theta) : \text{ Unitär, Element von } \text{SL}(2, \mathbb{C}) \text{ und von } \text{SU}(2).$$

## 5.2 Polarzerlegung des Produktes zweier Boosts

Die Zerlegung einer allgemeinen Lorentztransformation  $L$  in ihren reinen Anteil  $L_B$  und eine Rotation  $U$  kann wie in (1.8) beschrieben auf zweierlei Weise geschehen:

$$\begin{aligned} L &= UL_B = L'_B U \\ L'_B &= UL_B U^\dagger \end{aligned} \quad (5.6)$$

Bevor wir die Polarzerlegung zweier Lorentz-Boosts im Detail besprechen, sollten wir verstehen, wie sich diese beiden Zerlegungsmethoden voneinander unterscheiden. Zu diesem Zweck setzen drücken wir  $L_B$  durch (5.1) aus und erhalten:

$$\begin{aligned} L'_B &= U (\cosh(\chi/2) \sigma_0 - \sinh(\chi/2) \mathbf{n}) U^\dagger \\ &= \cosh(\chi/2) \sigma_0 - \sinh(\chi/2) U \mathbf{n} U^\dagger \quad . \\ &=: \cosh(\chi/2) \sigma_0 - \sinh(\chi/2) \mathbf{n}' \end{aligned} \quad (5.7)$$

Die der Rotation  $U$  folgenden bzw. vorausgehenden Boosts  $L'_B$  und  $L_B$  besitzen also dieselbe Rapidität  $\chi$ . Die Richtungen  $\mathbf{n}'$  bzw.  $\mathbf{n}$  der beiden Transformationen sind jedoch verschieden:

$$\mathbf{n}' = U \mathbf{n} U^\dagger. \quad (5.8)$$

Dieser Ausdruck beschreibt die Drehung des dem Vektor  $\underline{n}$  zugeordneten  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ -Spinors  $\mathbf{n}$  durch den unitären Operator  $U$ . Ist also die Zerlegung einer allgemeinen Lorentztransformation  $L$  in  $L_B$  und  $U$  bekannt, läßt sich  $L'_B$  einfach durch Drehung des Normalenvektors  $\underline{n}$  ermitteln:

$$L'_B = L_B(U \mathbf{n} U^\dagger, \chi). \quad (5.9)$$

Für den Rest dieses Kapitels beschränken wir uns auf den Fall

$$L = UL_B \quad (5.10)$$

in welchem der Boost der Rotation vorausgeht und wenden uns nun der Komposition zweier Boosttransformationen zu.

Das Produkt zweier Lorentz-Boosts bestimmen wir mit Hilfe der Rechenregeln für die Paulimatrizen (4.8) und deren Multiplikationstabelle (4.9):

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \mathbb{1} \quad (5.11)$$

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$$

$$\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1 \quad (5.12)$$

$$\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2.$$

Unter Ausnutzung dieser Beziehungen lautet das Produkt zweier Boosts

$$\begin{aligned} L_B(\underline{n}_2, \chi_2) L_B(\underline{n}_1, \chi_1) &= \\ &= (\cosh(\chi_2/2) \sigma_0 - \sinh(\chi_2/2) \mathbf{n}_2) (\cosh(\chi_1/2) \sigma_0 - \sinh(\chi_1/2) \mathbf{n}_1). \quad (5.13) \\ &= \text{ch}_1 \text{ch}_2 \sigma_0 - \text{sh}_1 \text{ch}_2 \mathbf{n}_1 - \text{sh}_2 \text{ch}_1 \mathbf{n}_2 + \text{sh}_1 \text{sh}_2 \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_1 \end{aligned}$$

Um die Übersicht über die Terme in (5.13) zu behalten haben wir naheliegende Abkürzungen der Gestalt  $\text{ch}_1 = \cosh(\chi_1/2)$  usw. eingeführt. Der Ausdruck  $\mathbf{n}_2 \mathbf{n}_1$  hat die Struktur eines Clifford-Produktes, welches in die Summe eines inneren und eines äußeren Produktes zerfällt:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_1 &= (n_2^i \sigma_i) (n_1^j \sigma_j) \\ &= \sum_{i=1}^3 n_2^i n_1^i \sigma_0 + i(n_2^1 n_1^2 - n_2^2 n_1^1) \sigma_3 + \dots \\ &\quad \dots + i(n_2^3 n_1^1 - n_2^1 n_1^3) \sigma_2 + i(n_2^2 n_1^3 - n_2^3 n_1^2) \sigma_1 \\ &= (\underline{n}_2, \underline{n}_1) \sigma_0 + i \mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{n}_1 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Das äußere Produkt  $\mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{n}_1$  faßt die Terme mit den Komponenten von  $\underline{n}_2 \times \underline{n}_1$  in einer kompakten Schreibweise zusammen. Setzen wir (5.14) in (5.13) ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} L_B(\underline{n}_2, \chi_2) L_B(\underline{n}_1, \chi_1) &= (\text{ch}_1 \text{ch}_2 + \text{sh}_1 \text{sh}_2 (\underline{n}_1, \underline{n}_2)) \sigma_0 - \dots \\ &\quad \dots - \text{sh}_1 \text{ch}_2 \mathbf{n}_1 - \text{sh}_2 \text{ch}_1 \mathbf{n}_2 + i \text{sh}_1 \text{sh}_2 \mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{n}_1 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Andererseits ergibt die Polarzerlegung der resultierenden Lorentztransformation

$$\begin{aligned} U(\underline{n}_R, \theta) L_B(\underline{n}_B, \chi) &= \\ &= (\cos(\theta/2) \sigma_0 - i \sin(\theta/2) \mathbf{n}_R) (\cosh(\chi/2) \sigma_0 - \sinh(\chi/2) \mathbf{n}_B), \quad (5.16) \\ &= \cos \text{ch} \sigma_0 - i \sin \text{ch} \mathbf{n}_R - \cos \text{sh} \mathbf{n}_B + i \sin \text{sh} \mathbf{n}_R \mathbf{n}_B \end{aligned}$$

worin wir dieselbe Art von Abkürzungen eingeführt haben wie in (5.13). Das Clifford-Produkt der Achsen  $\mathbf{n}_R$  und  $\mathbf{n}_B$  lautet (vgl. (5.14)):

$$\mathbf{n}_R \mathbf{n}_B = (\underline{n}_R, \underline{n}_B) \boldsymbol{\sigma}_0 + i \mathbf{n}_R \wedge \mathbf{n}_B. \quad (5.17)$$

Nach Einsetzen des Clifford-Produktes (5.17) in den Ausdruck (5.16) erhalten wir

$$\begin{aligned} U(\underline{n}_R, \theta) L_B(\underline{n}_B, \chi) &= (\cos \text{ch} + i \sin \text{sh}(\underline{n}_R, \underline{n}_B)) \boldsymbol{\sigma}_0 - \dots \\ &\dots - \cos \text{sh} \mathbf{n}_B - \sin \text{sh} \mathbf{n}_R \wedge \mathbf{n}_B - i \sin \text{ch} \mathbf{n}_R. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Der Polarzerlegungssatz besagt, daß man (5.18) mit der Darstellung (5.15) des Produktes zweier Lorentz-Boosts gleichsetzen kann. Beide Gleichungen enthalten einen Skalarteil ( $\boldsymbol{\sigma}_0$ ) und einen Vektorteil, die jeweils beide in einen Realteil und einen Imaginärteil zerfallen. Durch den Vergleich dieser vier Anteile ergeben sich vier Gleichungen in den Größen  $\theta$ ,  $\chi$ ,  $\underline{n}_R$  und  $\underline{n}_B$ :

$$\text{ch}_1 \text{ch}_2 + \text{sh}_1 \text{sh}_2 (\underline{n}_1, \underline{n}_2) = \cos \text{ch} \quad (5.19)$$

$$\sin \text{sh}(\underline{n}_R, \underline{n}_B) = 0 \quad (5.20)$$

$$\text{sh}_1 \text{ch}_2 \underline{n}_1 + \text{sh}_2 \text{ch}_1 \underline{n}_2 = \cos \text{sh} \underline{n}_B + \sin \text{sh} \underline{n}_R \times \underline{n}_B \quad (5.21)$$

$$\text{sh}_1 \text{sh}_2 \underline{n}_1 \times \underline{n}_2 = \sin \text{ch} \underline{n}_R. \quad (5.22)$$

Da die obenstehenden Gleichungen gelten komponentenweise, weswegen wir von der Darstellung in Paulimatrizen zur Vektorschreibweise übergehen konnten.

### 5.3 Plausibilität des Gleichungssystems

Es ist gewiß von Vorteil, vor den ersten Lösungsversuchen die Plausibilität des Gleichungssystems (5.19) – (5.22) zu diskutieren und zu überprüfen, ob bereits bekannte Spezialfälle durch diese Gleichungen reproduziert werden. Zunächst jedoch beschäftigen wir uns mit zwei Eigenschaften, die sofort ins Auge fallen:

- Gleichung (5.20) besagt, daß wegen  $(\underline{n}_R, \underline{n}_B) = 0$  die Drehachse  $\underline{n}_R$  senkrecht zur Geschwindigkeitsrichtung  $\underline{n}_B$  der resultierenden Lorentztransformation steht. In den Fällen  $\sin(\theta/2) = 0$  und  $\sinh(\chi/2) = 0$  bleibt das obenstehende Skalarprodukt zwar unbestimmt, allerdings ist für  $\theta = 0$  die Lage der Drehachse und für  $\chi = 0$  die Lage des Geschwindigkeitsvektors irrelevant.
- Gleichung (5.22) besagt, daß wegen  $\underline{n}_1 \times \underline{n}_2 \sim \underline{n}_R$  die Drehachse  $\underline{n}_R$  senkrecht zu den Geschwindigkeitsrichtungen  $\underline{n}_1$  und  $\underline{n}_2$  der kombinierten Boosts steht. In den Fällen  $\sinh(\chi_1/2) = 0$ ,  $\sinh(\chi_2/2) = 0$  und  $\sin(\theta/2) = 0$  bleibt die relative Lage des Kreuzproduktes zur Drehachse allerdings unbestimmt. Die Frage nach der



relativen Orientierung der Drehachse in Bezug zu den Boostgeschwindigkeiten verliert jedoch ihren Sinn, wenn wegen  $\chi_1 = 0$  bzw.  $\chi_2 = 0$  jeweils ein Geschwindigkeitsvektor verschwindet oder wenn wegen  $\theta = 0$  keine Drehung stattfindet.

Insgesamt steht also die Drehachse  $\underline{n}_R$  der Thomas–Wigner Rotation sowohl senkrecht zu den Ausgangsgeschwindigkeiten als auch senkrecht zur Endgeschwindigkeit nach der Addition, weswegen die Vektoren  $\underline{n}_1$ ,  $\underline{n}_2$  und  $\underline{n}_B$  in einer Ebene liegen müssen. Die Rotation findet ebenfalls in dieser Ebene statt, womit die hierzu senkrechte Dimension vom Prozeß der beiden Lorentztransformationen gänzlich unberührt bleibt. Das war zu erwarten, weil die Symmetrie des Vorgangs diesen auf die von  $\underline{n}_1$  und  $\underline{n}_2$  aufgespannte Ebene beschränkt.

Als nächstes überprüfen wir die Gleichungen (5.19) – (5.22) anhand einiger Sonderfälle, deren Ergebnis wir bereits kennen:

$v_1 = 0$  bzw.  $v_2 = 0$ :

Bei verschwindendem  $v_1$  bzw.  $v_2$  trägt jeweils nur ein Lorentz–Boost zum Ergebnis bei. In Gleichung (5.22) verschwindet wegen  $\chi_1 = 0$  bzw.  $\chi_2 = 0$  die linke Seite und legt so den Drehwinkel fest:

$$\sin(\theta/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0. \quad (5.23)$$

Mit  $\theta = 0$  ist Gleichung (5.20) automatisch erfüllt und liefert keine zusätzlichen Informationen. Es bleiben noch zwei Gleichungen, die wir für  $\chi_1 = 0$  hinschreiben:

$$\begin{aligned} (5.19) : \quad & \cosh(\chi_2/2) = \cosh(\chi/2) \\ (5.21) : \quad & \sinh(\chi_2/2) \underline{n}_2 = \sinh(\chi/2) \underline{n}_B \end{aligned} \quad (5.24)$$

Damit sind die Größen  $\chi$  und  $\underline{n}_B$  ebenfalls festgelegt und wir können zusammenfassen:

$$\begin{aligned} v_1 = 0 : \quad & \theta = 0, \quad \chi = \chi_2, \quad \underline{n}_B = \underline{n}_2 \\ v_2 = 0 : \quad & \theta = 0, \quad \chi = \chi_1, \quad \underline{n}_B = \underline{n}_1 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Das hier ebenfalls angegebene Resultat für  $v_2 = 0$  läßt sich analog zum Fall  $v_1 = 0$  berechnen. Für die Lorentztransformationen selbst gilt:

$$\begin{aligned} L_B(\underline{n}_2, \chi_2) L_B(\underline{n}_1, 0) &= L_B(\underline{n}_2, \chi_2) \\ L_B(\underline{n}_2, 0) L_B(\underline{n}_1, \chi_1) &= L_B(\underline{n}_1, \chi_1) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Dieses Resultat ist korrekt, denn ein Lorentz–Boost mit der Rapidity 0 wirkt wie die Identitätsoperation.

### Parallele Geschwindigkeiten:

Besitzen die beiden Lorentz-Boosts  $L_B(\underline{n}_1, \chi_1)$  und  $L_B(\underline{n}_2, \chi_2)$  parallele Geschwindigkeiten, verschwindet mit  $\underline{n}_2 = \underline{n}_1$  das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren. Auf diese Weise wird der Drehwinkel  $\theta$  durch Gleichung (5.22) festgelegt:

$$\sin(\theta/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0. \quad (5.27)$$

Mit  $\theta = 0$  ist Gleichung (5.20) automatisch erfüllt und liefert keine zusätzlichen Informationen. Es bleiben noch die beiden Gleichungen

$$(5.19) : \quad \text{ch}_1 \text{ch}_2 + \text{sh}_1 \text{sh}_2 = \text{ch} \quad (5.28)$$

$$(5.21) : \quad [\text{sh}_1 \text{ch}_2 + \text{sh}_2 \text{ch}_1] \underline{n}_1 = \text{sh} \underline{n}_B,$$

die mit Hilfe der Additionstheoreme für hyperbolische Funktionen umgeformt werden können zu

$$\begin{aligned} \cosh(\chi_2/2 + \chi_1/2) &= \cosh(\chi/2) \\ [\sinh(\chi_2/2 + \chi_1/2)] \underline{n}_1 &= \sinh(\chi/2) \underline{n}_B. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Als Resultat ergibt sich das bereits aus Abschnitt 4.4 bekannte Additionstheorem für parallele Geschwindigkeiten:

$$\underline{n}_2 = \underline{n}_1 : \quad \theta = 0, \quad \chi_2 + \chi_1 = \chi, \quad \underline{n}_1 = \underline{n}_B. \quad (5.30)$$

Für die Lorentztransformationen selbst lautet dieses Theorem

$$L_B(\underline{n}_1, \chi_2) L_B(\underline{n}_1, \chi_1) = L_B(\underline{n}_1, \chi_2 + \chi_1). \quad (5.31)$$

Im Fall paralleler Geschwindigkeiten erhalten wir somit ebenfalls ein korrektes Resultat.

### Galileischer Grenzfall:

In einem nichtrelativistischem Szenario sind die Geschwindigkeiten  $v_1$ ,  $v_2$  und  $v$  klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit  $c$ , wodurch die Rapiditäten sich den zugehörigen Geschwindigkeiten annähern, vgl. die Einführung der Rapidität (2.27) in Kapitel 2:

$$v \ll c : \quad \chi \approx \frac{v}{c}. \quad (5.32)$$

Wir werden nun die Gleichungen (5.19) – (5.22) in erster Ordnung in den Geschwindigkeiten auswerten und schreiben

$$\begin{aligned} \text{ch}_1 &\approx 1 & \text{sh}_1 &\approx \frac{1}{2} \frac{v_1}{c} \\ \text{ch}_2 &\approx 1 & \text{sh}_2 &\approx \frac{1}{2} \frac{v_2}{c} \\ \text{ch} &\approx 1 & \text{sh} &\approx \frac{1}{2} \frac{v}{c}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Der Faktor  $1/2$  ist eine Folge der Halbrapiditäten mit denen die Funktionen  $\text{ch}$  und  $\text{sh}$  im letzten Abschnitt definiert wurden. In dieser Näherung verschwindet die linke Seite von Gleichung (5.22) und wir können schließen:

$$\theta = 0 : \quad \cos(\theta/2) = 1, \quad \sin(\theta/2) = 0. \quad (5.34)$$

Die ersten beiden Gleichungen (5.19) und (5.20) degenerieren ohne weiteren Informationsgewinn zu den trivialen Identitäten  $1 = 1$  und  $0 = 0$ . Es bleibt noch die Gleichung (5.21), die in dieser Näherung die Gestalt

$$\frac{1}{2} \frac{v_1}{c} \underline{n}_1 + \frac{1}{2} \frac{v_2}{c} \underline{n}_2 = \frac{1}{2} \frac{v}{c} \underline{n}_B \quad (5.35)$$

annimmt. Vereinigen wir Betrag und Richtungsvektor der Geschwindigkeiten zu vektoriellen Größen, erhalten wir mit

$$v \ll c : \quad \theta = 0, \quad \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_B \quad (5.36)$$

die nichtrelativistische vektorielle Addition von Geschwindigkeiten. Dieses Resultat ist also ebenfalls korrekt und dient somit der weiteren Plausibilisierung des untersuchten Gleichungssystems.

## 5.4 Lösung des Gleichungssystems

Für die Berechnung der gesuchten Größen  $\theta$ ,  $\chi$  und  $\underline{n}_B$  ist das System von Gleichungen aus Abschnitt 5.2 zu unhandlich, weswegen wir von den beiden Vektorgleichungen (5.21) und (5.22) einfachere skalare Gleichungen ableiten werden. Zur besseren Nachvollziehbarkeit notieren wir das Ausgangssystem (5.19) – (5.22) hier noch einmal:

$$\text{ch}_1 \text{ch}_2 + \text{sh}_1 \text{sh}_2 (\underline{n}_1, \underline{n}_2) = \cos \chi \quad (5.37)$$

$$\sin \text{sh} (\underline{n}_R, \underline{n}_B) = 0 \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \text{sh}_1 \text{ch}_2 \underline{n}_1 + \text{sh}_2 \text{ch}_1 \underline{n}_2 = \cos \text{sh} \underline{n}_B + \dots \\ \dots + \text{sh}_1 \text{sh}_2 \text{th} [(\underline{n}_B, \underline{n}_1) \underline{n}_2 - (\underline{n}_B, \underline{n}_2) \underline{n}_1] \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\text{sh}_1 \text{sh}_2 \underline{n}_1 \times \underline{n}_2 = \sin \chi \underline{n}_R. \quad (5.40)$$

Gleichung (5.39) entsteht aus (5.21) durch Ersetzen des Terms  $\sin \underline{n}_R$  durch (5.40) und anschließende Anwendung der  $BAC - CAB$  Regel auf das so entstandene doppelte Kreuzprodukt. Aus diesem Gleichungssystem lassen sich die folgenden ergänzenden

Beziehungen ableiten:

$$\begin{aligned} \text{sh}_1 \text{ch}_2 + \text{sh}_2 \text{ch}_1 (\underline{n}_1, \underline{n}_2) &= \cos \text{sh} (\underline{n}_B, \underline{n}_1) + \dots \\ &\dots + \text{sh}_1 \text{sh}_2 \text{th} [(\underline{n}_B, \underline{n}_1)(\underline{n}_1, \underline{n}_2) - (\underline{n}_B, \underline{n}_2)] \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \text{sh}_1 \text{ch}_2 (\underline{n}_1, \underline{n}_2) + \text{sh}_2 \text{ch}_1 &= \cos \text{sh} (\underline{n}_B, \underline{n}_2) + \dots \\ &\dots + \text{sh}_1 \text{sh}_2 \text{th} [(\underline{n}_B, \underline{n}_1) - (\underline{n}_B, \underline{n}_2)(\underline{n}_1, \underline{n}_2)] \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\text{sh}_1 \text{sh}_2 \sqrt{1 - (\underline{n}_1, \underline{n}_2)^2} = \sin \text{ch}. \quad (5.43)$$

Die Gleichungen (5.41) und (5.42) entstehen durch Bildung des Skalarproduktes von (5.39) mit den Richtungsvektoren  $\underline{n}_1$  bzw.  $\underline{n}_2$ . Für (5.43) wurden die Beträge der in (5.40) auftretenden Vektoren mit Hilfe der *BAC – CAB* Regel berechnet:

$$(\underline{n}_R, \underline{n}_R) = 1 \quad (5.44)$$

$$(\underline{n}_1 \times \underline{n}_2)(\underline{n}_1 \times \underline{n}_2) = (\underline{n}_1, \underline{n}_2 \times (\underline{n}_1 \times \underline{n}_2)) = 1 - (\underline{n}_1, \underline{n}_2)^2. \quad (5.45)$$

Das Quadrieren und anschließende Wurzelziehen erweckt den Eindruck eines möglichen Verlustes von Vorzeicheninformationen. Tatsächlich ist das nicht der Fall, da die Größen  $\text{sh}_1$ ,  $\text{sh}_2$  und  $\sin$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit positiv gewählt werden können:

- Die Faktoren  $\text{sh}_1 = \sinh(\chi_1/2)$  und  $\text{sh}_2 = \sinh(\chi_2/2)$  sind für negative Rapiditäten bzw. Geschwindigkeiten selbst negativ. Die von uns gewählte Parametrisierung der Lorentztransformationen mit Hilfe der Richtungsvektoren  $\underline{n}_1$  und  $\underline{n}_2$  ermöglicht es uns, alle Informationen zur Orientierung der Geschwindigkeiten in den Richtungsvektoren auszudrücken. Die Rapiditäten  $\chi_1$  und  $\chi_2$  lassen sich auf diese Weise immer positiv wählen.
- Die Faktoren  $\sin = \sin(\theta/2)$  und  $\cos = \cos(\theta/2)$  sind aufgrund der verwendeten Halbwinkel im Bereich  $0 \leq \theta \leq \pi$  beide nicht negativ. Jeder Winkel außerhalb dieses Bereiches kann durch Umkehr der Orientierung der Drehachse auf einen Winkel innerhalb dieses Bereiches zurückgeführt werden. Auch hier verhindert die geschickte Orientierung des Normalenvektors  $\underline{n}_R$  negative Koeffizienten.

Aus dem Gleichungssystem (5.37) – (5.43) können wir nun mit

dem Rotationswinkel  $\theta$  der Thomas–Wigner Rotation  
 der Rapidität  $\chi$  des resultierenden Lorentz–Boosts  
 dem Richtungsvektor  $\underline{n}_B$  der resultierenden Geschwindigkeit

alle gewünschten Größen berechnen.

Der Winkel der Thomas–Wigner Rotation:

Im ersten Schritt dividieren wir Gleichung (5.43) durch Gleichung (5.19) und eliminieren so den Term  $\text{ch} = \cosh(\chi/2)$ . Wir erhalten einen Ausdruck für  $\tan(\theta/2)$ , aus dem mit Hilfe elementarer Umrechnungsformeln auch  $\sin(\theta/2)$  und  $\cos(\theta/2)$  bestimmt werden können:

$$\tan(\theta/2) = \frac{\text{sh}_1 \text{sh}_2 \sqrt{1 - (\underline{n}_1, \underline{n}_2)^2}}{\text{ch}_1 \text{ch}_2 + \text{sh}_1 \text{sh}_2 (\underline{n}_1, \underline{n}_2)} \quad (5.46)$$

$$\sin(\theta/2) = \frac{\text{sh}_1 \text{sh}_2 \sqrt{1 - (\underline{n}_1, \underline{n}_2)^2}}{\sqrt{\text{ch}_1^2 \text{ch}_2^2 + \text{sh}_1^2 \text{sh}_2^2 + 2 \text{ch}_1 \text{ch}_2 \text{sh}_1 \text{sh}_2 (\underline{n}_1, \underline{n}_2)}} \quad (5.47)$$

$$\cos(\theta/2) = \frac{\text{ch}_1 \text{ch}_2 + \text{sh}_1 \text{sh}_2 (\underline{n}_1, \underline{n}_2)}{\sqrt{\text{ch}_1^2 \text{ch}_2^2 + \text{sh}_1^2 \text{sh}_2^2 + 2 \text{ch}_1 \text{ch}_2 \text{sh}_1 \text{sh}_2 (\underline{n}_1, \underline{n}_2)}}. \quad (5.48)$$

Wie sich leicht nachvollziehen läßt, verschwindet die Thomas–Wigner Rotation für die im Abschnitt 5.3 betrachteten Sonderfälle:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Einzelne Boosts} & v_1 = 0, v_2 = 0 : \\ \text{Parallele Boosts} & \underline{n}_1 = \pm \underline{n}_2 : \\ \text{Galileischer Grenzfall} & v_1 \ll c, v_2 \ll c : \end{array} \right\} \theta = 0. \quad (5.49)$$

Rapidität des resultierenden Boosts:

Da nun die Ausdrücke  $\sin(\theta/2)$  und  $\cos(\theta/2)$  bekannt sind, kann sowohl Gleichung (5.37) als auch Gleichung (5.43) zur Berechnung der Rapidität  $\chi$  herangezogen werden. Wir erhalten in beiden Fällen

$$\cosh(\chi/2) = \sqrt{\text{ch}_1^2 \text{ch}_2^2 + \text{sh}_1^2 \text{sh}_2^2 + 2 \text{ch}_1 \text{ch}_2 \text{sh}_1 \text{sh}_2 (\underline{n}_1, \underline{n}_2)}. \quad (5.50)$$

Dieses Resultat reproduziert für die im letzten Abschnitt behandelten Sonderfälle die bekannten Ergebnisse:

$$\text{Einzelne Boosts} \quad v_1 = 0, v_2 = 0 : \quad \chi = \chi_1, \quad \chi = \chi_2 \quad (5.51)$$

$$\text{Parallele Boosts} \quad \underline{n}_1 = \pm \underline{n}_2 : \quad \chi = \chi_1 \pm \chi_2 \quad (5.52)$$

$$\text{Galileischer Grenzfall} \quad v_1 \ll c, v_2 \ll c : \quad \underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2. \quad (5.53)$$

Während sich die ersten beiden Beziehungen problemlos aus (5.50) ablesen lassen, ist zum Galileischen Grenzfall eine Erläuterung angebracht. Gleichung (5.53) entsteht aus

(5.50) durch Entwicklung aller Terme für kleine Rapiditäten  $\chi \approx v/c$  bis zur zweiten Ordnung:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{8}\chi^2 &\approx \sqrt{1 + \frac{1}{4}\chi_1^2 + \frac{1}{4}\chi_2^2 + \frac{1}{2}\chi_1\chi_2(\underline{n}_1, \underline{n}_2)} \\
&\approx 1 + \frac{1}{8}\chi_1^2 + \frac{1}{8}\chi_2^2 + \frac{1}{4}\chi_1\chi_2(\underline{n}_1, \underline{n}_2) \\
\Rightarrow \chi^2 &= \chi_1^2 + \chi_2^2 + 2\chi_1\chi_2(\underline{n}_1, \underline{n}_2) \quad . \quad (5.54) \\
\Rightarrow v^2 &= v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2(\underline{n}_1, \underline{n}_2) \\
\Rightarrow (\underline{v}, \underline{v}) &= (\underline{v}_1, \underline{v}_1) + (\underline{v}_2, \underline{v}_2) + 2(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = (\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + \underline{v}_2) \\
\Rightarrow \underline{v} &= \underline{v}_1 + \underline{v}_2
\end{aligned}$$

Die Entwicklung des Ausdrucks (5.50) für kleine Geschwindigkeiten führt also erneut zum klassischen vektoriellen Additionsgesetz.

#### Richtungsvektor der resultierenden Geschwindigkeit:

Die zwei Komponenten des Richtungsvektors  $\underline{n}_B$  werden durch das System der beiden linearen Gleichungen (5.41) und (5.42) festgelegt:

$$\begin{aligned}
\text{sh}_1 \text{ch}_2 + \text{sh}_2 \text{ch}_1(\underline{n}_1, \underline{n}_2) &= \cos \text{sh}(\underline{n}_B, \underline{n}_1) + \dots \\
&\dots + \text{sh}_1 \text{sh}_2 \text{th}[(\underline{n}_B, \underline{n}_1)(\underline{n}_1, \underline{n}_2) - (\underline{n}_B, \underline{n}_2)] \quad (5.55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{sh}_1 \text{ch}_2(\underline{n}_1, \underline{n}_2) + \text{sh}_2 \text{ch}_1 &= \cos \text{sh}(\underline{n}_B, \underline{n}_2) + \dots \\
&\dots + \text{sh}_1 \text{sh}_2 \text{th}[(\underline{n}_B, \underline{n}_1) - (\underline{n}_B, \underline{n}_2)(\underline{n}_1, \underline{n}_2)]. \quad (5.56)
\end{aligned}$$

Da der Vektor  $\underline{n}_B$  sich in der von  $\underline{n}_1$  und  $\underline{n}_2$  aufgespannten Ebene befindet, können wir letztere Vektoren als Basis verwenden und schreiben:

$$\underline{n}_B = n^1 \underline{n}_1 + n^2 \underline{n}_2. \quad (5.57)$$

Diese Basis ist im allgemeinen nicht orthogonal sondern schiefwinklig, und die im obenstehenden Gleichungssystem auftretenden kovarianten Komponenten  $(\underline{n}_B, \underline{n}_1)$  und  $(\underline{n}_B, \underline{n}_2)$  des Vektors  $\underline{n}_B$  müssen nicht mit den gesuchten kontravarianten Komponenten  $n^1$  und  $n^2$  übereinstimmen. Zwischen beiden Typen von Komponenten vermittelt der metrische Tensor  $g_{ij} = (\underline{n}_i, \underline{n}_j)$ , mit dessen Hilfe die Indizes herauf- bzw. heruntergezogen werden können:

$$n^i = g^{ij}(\underline{n}_B, \underline{n}_j), \quad (\underline{n}_B, \underline{n}_i) = g_{ij} n^j. \quad (5.58)$$

In unserem Fall haben der metrische Tensor  $g_{ij}$  und sein Inverses  $g^{ij}$  die Gestalt

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & (\underline{n}_1, \underline{n}_2) \\ (\underline{n}_1, \underline{n}_2) & 1 \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -(\underline{n}_1, \underline{n}_2) \\ -(\underline{n}_1, \underline{n}_2) & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{1 - (\underline{n}_1, \underline{n}_2)^2}, \quad (5.60)$$

womit sich die Beziehung zwischen kovarianten und kontravarianten Komponenten explizit hinschreiben läßt:

$$\begin{aligned} (1 - (\underline{n}_1, \underline{n}_2)^2) n^1 &= (\underline{n}_B, \underline{n}_1) + (\underline{n}_1, \underline{n}_2)(\underline{n}_B, \underline{n}_2) \\ (1 - (\underline{n}_1, \underline{n}_2)^2) n^2 &= (\underline{n}_B, \underline{n}_2) + (\underline{n}_1, \underline{n}_2)(\underline{n}_B, \underline{n}_1) \end{aligned} \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned} (\underline{n}_B, \underline{n}_1) &= n^1 + (\underline{n}_1, \underline{n}_2) n^2 \\ (\underline{n}_B, \underline{n}_2) &= n^2 + (\underline{n}_1, \underline{n}_2) n^1. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Eine weitere hilfreiche Relation läßt sich aus (5.48) und (5.50) ableiten:

$$\text{ch}_1 \text{ch}_2 + \text{sh}_1 \text{sh}_2 (\underline{n}_1, \underline{n}_2) = \cos(\theta/2) \cosh(\chi/2). \quad (5.63)$$

Mit Hilfe dieser Relation läßt sich später der Rotationswinkel  $\theta$  aus dem Gleichungssystem (5.55) und (5.56) eliminieren. Wir beschreiben nun die notwendigen Umformungen des Gleichungssystems in einem kurzen Abriß:

- Jede der beiden Gleichungen wird zunächst mit dem Faktor  $(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$  multipliziert und anschließend von der anderen abgezogen.
- Die kovarianten Komponenten  $(\underline{n}_B, \underline{n}_j)$  werden mit Hilfe von (5.62) durch die kontravarianten Komponenten  $n^i$  ersetzt.
- In beiden Gleichungen entsteht vor jedem Term der Faktor  $(1 - (\underline{n}_1, \underline{n}_2)^2)$ , den wir wegekürzen können. Als Folge dieser Division ist das Gleichungssystem nicht mehr für parallele Normalenvektoren  $(\underline{n}_1, \underline{n}_2) = \pm 1$  gültig, da der obengenannte Faktor in diesem Fall verschwindet.

Nach diesen Umformungen hat das Gleichungssystem die Gestalt

$$\text{ch}_2 \text{sh}_1 = \cos \text{sh} n^1 - \text{sh}_1 \text{sh}_2 \text{th}[n^2 + (\underline{n}_1, \underline{n}_2) n^1] \quad (5.64)$$

$$\text{ch}_1 \text{sh}_2 = \cos \text{sh} n^2 + \text{sh}_1 \text{sh}_2 \text{th}[n^1 + (\underline{n}_1, \underline{n}_2) n^2]. \quad (5.65)$$

Jetzt ersetzen wir den Term  $\cos$  durch Gleichung (5.63) und erhalten

$$\text{ch}_2 \text{sh}_1 = \text{ch}_1 \text{ch}_2 \text{th} n^1 - \text{sh}_1 \text{sh}_2 \text{th} n^2 \quad (5.66)$$

$$\text{ch}_1 \text{sh}_2 = \text{sh}_1 \text{sh}_2 \text{th} n^1 + (\text{ch}_1 \text{ch}_2 + 2 \text{sh}_1 \text{sh}_2 (\underline{n}_1, \underline{n}_2)) \text{th} n^2. \quad (5.67)$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich folgendermaßen lösen:

$$\operatorname{th} n^1 = \frac{\operatorname{sh}_1}{\operatorname{ch}_1} \left( 1 + \frac{\operatorname{sh}_2^2}{\operatorname{ch}^2} \right) \quad (5.68)$$

$$\operatorname{th} n^2 = \frac{\operatorname{ch}_2 \operatorname{sh}_2}{\operatorname{ch}^2}. \quad (5.69)$$

Wir verzichten an dieser Stelle auf die Überprüfung der Lösung durch Reduktion auf bekannte Spezialfälle und zeigen stattdessen im nächsten Abschnitt, daß die obenstehenden Komponenten  $n^1$  und  $n^2$  zur bekannten relativistischen Addition beliebig orientierter Geschwindigkeiten äquivalent sind.

## 5.5 Additionstheorem für nichtparallele Geschwindigkeiten

Gelegentlich ist in der Literatur und in Internetforen zu lesen, die Herleitung des relativistischen Additionstheorems zweier beliebig gerichteter Geschwindigkeiten sei etwas mühsam. Unser Ansatz (5.68) und (5.69) unterstreicht diese Aussage durchaus, da er dem bekannten Resultat (vgl. z.B. [5]) nicht im mindesten ähnelt. Der Grund des unterschiedlichen Erscheinungsbildes ist die Verwendung der Halbrapiditäten  $\chi_1/2$ ,  $\chi_2/2$  und  $\chi/2$ , die sich nicht direkt in Geschwindigkeiten ausdrücken lassen. Für die Umwandlung von Rapiditäten in Geschwindigkeiten mit Hilfe von

$$\tanh(\chi) = \frac{v}{c} \quad (5.70)$$

müssen wir daher hyperbolische Funktionen der vollen Rapidität generieren:

$$\cosh(\chi) = \cosh^2(\chi/2) + \sinh^2(\chi/2) \quad (5.71)$$

$$\sinh(\chi) = 2 \cosh(\chi/2) \sinh(\chi/2) \quad (5.72)$$

$$\tanh(\chi) = \frac{2 \tanh(\chi/2)}{1 + \tanh^2(\chi/2)}. \quad (5.73)$$



Für die Herleitung des Additionstheorems benötigen wir Terme, die zwischen Ausdrücken in Halbrapiditäten und Ausdrücken in vollen Rapiditäten vermitteln:

$$\tanh(\chi_i) = \frac{2 \operatorname{ch}_i \operatorname{sh}_i}{\operatorname{ch}_i^2 + \operatorname{sh}_i^2} \quad i \in \{1, 2\} \quad (5.74)$$

$$1 + \tanh^2(\chi) = \frac{\operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} \quad (5.75)$$

$$\sqrt{1 - \tanh^2(\chi_1)} = \frac{1}{\operatorname{ch}_1^2 + \operatorname{sh}_1^2} \quad (5.76)$$

$$1 + \tanh(\chi_1) \tanh(\chi_2) (\underline{n}_1, \underline{n}_2) = \frac{\operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}^2}{(\operatorname{ch}_1^2 + \operatorname{sh}_1^2)(\operatorname{ch}_2^2 + \operatorname{sh}_2^2)}. \quad (5.77)$$

Diese Beziehungen lassen sich mit Hilfe der elementaren Rechenregeln für hyperbolische Funktionen sowie dem Ausdruck (5.50) für  $(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$  unschwer nachvollziehen. Die benötigten Geschwindigkeiten setzen wir aus Betrag und Richtungsvektor zusammen:

$$\frac{1}{c} \underline{v} = \tanh(\chi) \underline{n}, \quad \frac{1}{c} \underline{v}_1 = \tanh(\chi_1) \underline{n}_1, \quad \frac{1}{c} \underline{v}_2 = \tanh(\chi_2) \underline{n}_2. \quad (5.78)$$

Wir betrachten nun die Komponenten der resultierenden Geschwindigkeit

$$\frac{1}{c} \underline{v} = \tanh(\chi) n^1 \underline{n}_1 + \tanh(\chi) n^2 \underline{n}_2 \quad (5.79)$$

etwas genauer und eliminieren mit Hilfe von (5.74)–(5.77) alle Ausdrücke in Halbrapiditäten:

$$\begin{aligned} \tanh(\chi) n^1 &= 2 \frac{\operatorname{ch}^2 \operatorname{th} n^1}{\operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}^2} = 2 \frac{\operatorname{sh}_1 (\operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}_2^2)}{\operatorname{ch}_1 (\operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}^2)} \\ &= \frac{\tanh(\chi_1) + \tanh(\chi_2) \left(1 - \sqrt{1 - \tanh^2(\chi_1)}\right) (\underline{n}_1, \underline{n}_2)}{1 + \tanh(\chi_1) \tanh(\chi_2) (\underline{n}_1, \underline{n}_2)} \end{aligned} \quad (5.80)$$

$$\begin{aligned} \tanh(\chi) n^2 &= 2 \frac{\operatorname{ch}^2 \operatorname{th} n^2}{\operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}^2} = 2 \frac{\operatorname{ch}_2 \operatorname{sh}_2}{\operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}^2} \\ &= \frac{\tanh(\chi_2) \sqrt{1 - \tanh^2(\chi_1)}}{1 + \tanh(\chi_1) \tanh(\chi_2) (\underline{n}_1, \underline{n}_2)}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Die obenstehenden Beziehungen können am einfachsten in umgekehrter Schlußrichtung überprüft werden, indem man jeweils die Terme mit vollen Rapiditäten auf den vorgegebenen Ausdruck in Halbrapiditäten zurückrechnet. Schließlich fassen wir die beiden

Komponenten (5.80) und (5.81) gemäß (5.79) in einer Vektorgleichung zusammen, ersetzen die Rapiditäten durch Geschwindigkeiten und erhalten

$$\frac{1}{c} \underline{v} = \frac{\frac{1}{c} \underline{v}_1 + \frac{1}{c} v_2 (\underline{n}_1, \underline{n}_2) \underline{n}_1 + \sqrt{1 - v_1^2/c^2} \frac{1}{c} v_2 [\underline{n}_2 - (\underline{n}_1, \underline{n}_2) \underline{n}_1]}{1 + (\underline{v}_1, \underline{v}_2)/c^2}. \quad (5.82)$$

Offenbar tragen die zu  $\underline{v}_1$  parallel bzw. senkrecht stehenden Anteile von  $\underline{v}_2$  in verschiedener Weise zur resultierenden Geschwindigkeit bei:

$$\underline{v}_{2\parallel} = v_2 (\underline{n}_1, \underline{n}_2) \underline{n}_1 \quad (\text{paralleler Anteil}) \quad (5.83)$$

$$\underline{v}_{2\perp} = v_2 [\underline{n}_2 - (\underline{n}_1, \underline{n}_2) \underline{n}_1] \quad (\text{senkrechter Anteil}). \quad (5.84)$$

Mit den Abkürzungen  $\underline{v}_{2\parallel}$  und  $\underline{v}_{2\perp}$  lautet das relativistische Additionstheorem für beliebig gerichtete Geschwindigkeiten

$$\underline{v} = \frac{1}{1 + (\underline{v}_1, \underline{v}_2)/c^2} \left[ \underline{v}_1 + \underline{v}_{2\parallel} + \sqrt{1 - v_1^2/c^2} \underline{v}_{2\perp} \right]. \quad (5.85)$$

Diese Form des Additionstheorems findet man auch in der Standardliteratur [5], wo es auf weit einfachere Weise hergeleitet wird als hier. Damit ist Gleichung (5.85) eine weitere Bestätigung des Gleichungssystems (5.19) – (5.22) sowie der zugrundeliegenden Darstellung (4.26) von Lorentz–Boosts als hermitesche Matrizen aus der Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$ . Darüberhinaus ist uns in diesem Abschnitt gelungen, das Additionstheorem für beliebig orientierte Geschwindigkeiten ausgehend von allgemeinen algebraischen Eigenschaften der Lorentztransformation in einem Top–Down–Verfahren abzuleiten.

## 5.6 Diskussion des Rotationswinkels

Um ein Gefühl für die Eigenschaften des Rotationswinkels  $\theta$  zu bekommen, verwenden wir Gleichung (5.46) und schreiben sie folgendermaßen um:

$$\tan(\theta/2) = \frac{\text{th}_1 \text{th}_2 \sqrt{1 - (\underline{n}_1, \underline{n}_2)^2}}{1 + \text{th}_1 \text{th}_2 (\underline{n}_1, \underline{n}_2)} = \frac{\text{th}_1 \text{th}_2 \sin(\gamma)}{1 + \text{th}_1 \text{th}_2 \cos(\gamma)}. \quad (5.86)$$

Das Skalarprodukt  $(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$  haben wir im letzten Schritt durch den Winkel  $\gamma$  zwischen den Geschwindigkeitsvektoren der beiden Lorentz–Boosts ausgedrückt. Die Größen  $\text{th}_1$  und  $\text{th}_2$  hatten wir als Abkürzung für  $\tanh(\chi_1/2)$  und  $\tanh(\chi_2/2)$  eingeführt. Es sind monotone Funktionen der Rapiditäten und somit auch der Geschwindigkeiten  $v_1$  bzw.  $v_2$  mit den Randwerten

$$\left. \begin{array}{l} \text{th}_i = 0 \quad \text{für} \quad v_i = 0 \\ \text{th}_i = 1 \quad \text{für} \quad v_i = c \end{array} \right\} i \in \{1, 2\}. \quad (5.87)$$

Gemäß Gleichung (5.86) hängt die Funktion  $\tan(\theta/2)$  ebenfalls monoton von den beiden Variablen  $\text{th}_1$  und  $\text{th}_2$  ab, denn die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \tan(\theta/2)}{\partial (\text{th}_1)} = \frac{\partial \tan(\theta/2)}{\partial (\text{th}_2)} = \frac{1}{(1 + \text{th}_1 \text{th}_2 \cos(\gamma))^2} \quad (5.88)$$

sind überall positiv. Den größten Wert  $\theta_M$  erreicht der Rotationswinkel wenn beide Geschwindigkeiten sich mit  $v_1 \rightarrow c$  und  $v_2 \rightarrow c$  dem Wert der Lichtgeschwindigkeit nähern:

$$\tan(\theta_M/2) = \frac{\sin(\gamma)}{1 + \cos(\gamma)} = \frac{2 \cos(\gamma/2) \sin(\gamma/2)}{1 + \cos^2(\gamma/2) - \sin^2(\gamma/2)} = \tan(\gamma/2). \quad (5.89)$$

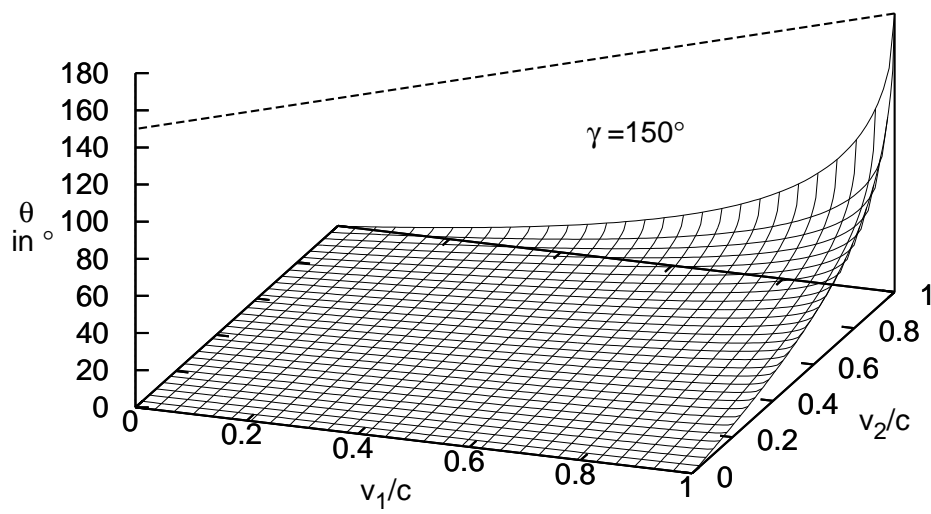
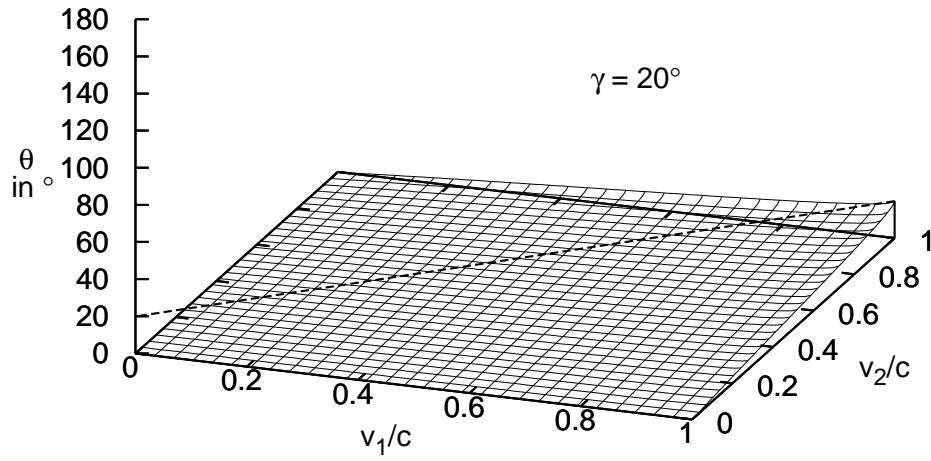
Hieraus können wir schließen daß der maximale Winkel

$$\theta_M = \gamma \quad (5.90)$$

lautet. In Abbildung 5.1 ist der Rotationswinkel  $\theta$  in Abhängigkeit der beiden Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  für  $\gamma = 20^\circ$  und  $\gamma = 150^\circ$  dargestellt. Letztendlich können wir die Eigenschaften der Thomas–Wigner Rotation folgendermaßen in Worte fassen:

Zwei aufeinanderfolgende Lorentz–Boosts lassen sich durch einen einzigen Boost beschreiben, wenn das System zusätzlich innerhalb der von den Geschwindigkeiten  $\underline{v}_1$  und  $\underline{v}_2$  aufgespannten Ebene um den Winkel  $\theta$  gedreht wird. Diese Drehung verlegt eine Gerade entlang  $\underline{v}_1$  so, daß sie anschließend zwischen den Vektoren  $\underline{v}_1$  und  $\underline{v}_2$  verläuft. Falls beide Geschwindigkeiten die Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit erreichen, verläuft diese Gerade nach der Drehung entlang  $\underline{v}_2$ .

Abbildung 5.1: Winkel der Thomas–Wigner–Rotation



## Literaturverzeichnis

- [1] J.C.Baez, J.P.Muniain, *Gauge Fields, Knots and Gravity*, World Scientific, Singapore- New Jersey- London- Hong Kong, (1994).
- [2] J.Gray, *Olinde Rodrigues' Paper of 1840 on Transformation Groups*, Archive of the History of Exact Sciences **21**, 375, Springer, Berlin– Heidelberg (1979/80).
- [3] R.Hübner, *Der Unterschied zwischen keiner Drehung und einer Drehung um  $2\pi$* , private Aufzeichnungen, Wesel (2010).
- [4] J.Hicks, *A Poet with a Slide Rule: Piet Hein bestrides art and science*, Life Magazine, October 14, 55-66 (1966).
- [5] L.D.Landau, E.M.Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik Band II: Klassische Feldtheorie*, Akademie - Verlag, Berlin (1989).
- [6] A.Messiah, *Quantenmechanik Bd. II*, de Gruyter, Berlin- New York (1985).
- [7] C.W.Misner, K.S.Thorne, J.A.Wheeler, *Gravitation*, W.H.Freeman and Company, New York (1973).
- [8] G.Roepstorff, *Einführung in die Quantenfeldtheorie*, RWTH Aachen, Vorlesungsskript (2000).
- [9] L.H.Thomas, *Motion of the spinning Electron*, Nature 117, 514 (1926).
- [10] E.P.Wigner, *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*, Ann. Math. 40, 149-204 (1939).